

Electromagnétique 3 :

Induction - Dipôles - Energie

1. RAPPELS D'ELECTROSTATIQUE	3
1.1. loi de Coulomb – Champ électrique	3
1.2. Propriétés du champ électrique \vec{E}	5
2. RAPPELS DE MAGNETOSTATIQUE	6
2.1. Le courant électrique	6
2.2. Force magnétique et Champ magnétique	9
2.3. Propriétés du champ magnétique :	10
2.4. Potentiel vecteur du champ magnétique	11
3. L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE	13
3.1. Préambule	13
3.2. Déplacement d'un conducteur filiforme dans un champ B indépendant du temps	14
3.3. Force électromotrice d'induction – loi de Faraday	16
3.4. Loi de Faraday	17
3.5. Travaux Dirigés – Induction	19
3.6. Circuits filiformes – Coefficients d'induction	20
3.7. Travaux dirigés – Coefficients d'induction	22
3.8. Rappel d'électrocinétique - circuit contenant une bobine	23
3.9. Applications	24
3.10. Circuit non-filiforme : Courants de Foucault	26
4. TRAVAIL DES FORCES DE LAPLACE	27
5. ENERGIE MAGNETIQUE	28
5.1. Circuits filiformes	28
5.2. Association de circuits filiformes	30

5.3.	Circuits non filiformes	31
5.4.	Travaux Dirigés	33
6.	DIPOLE ELECTROSTATIQUE	35
6.1.	Systèmes de charges ponctuelles	35
6.2.	Le dipôle électrostatique – moment diélectrique	35
6.3.	Action d'un champ sur un dipôle	36
6.4.	Travaux dirigés	37
7.	DIPOLE MAGNETIQUE	38
7.1.	Moment magnétique	38
7.2.	Potentiel vecteur créé à grande distance par une spire	39
7.3.	Champ magnétique créé par une spire circulaire	41
7.4.	Lignes de champ du dipôle	42
7.5.	Actions mécaniques subies par un dipôle	43
7.6.	Exemple	44
7.7.	Analogie moment électrique / magnétique : dipôle magnétique	44
7.8.	Travaux dirigés	44

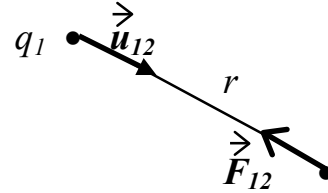
1. Rappels d'électrostatique

1.1. loi de Coulomb – Champ électrique

- Loi de Coulomb

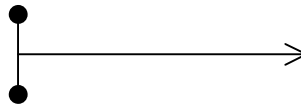
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ S.I.} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ S.I.} \approx 9 \cdot 10^9$$



- Principe de superposition : D'une manière plus générale : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

(Exemples avec 2 charges)



- E créé par une charge ponctuelle q_1 : $\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{12} \Rightarrow \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \cdot \vec{E}_1$

- Potentiel créé par une charge ponctuelle q_1 : $V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r}$

- densité volumique de charges : $\rho(x, y, z) = \frac{dq}{dV}$ C/m³

- densité surfacique de charges : $\sigma(x, y, z) = \frac{dq}{dS}$ C/m²

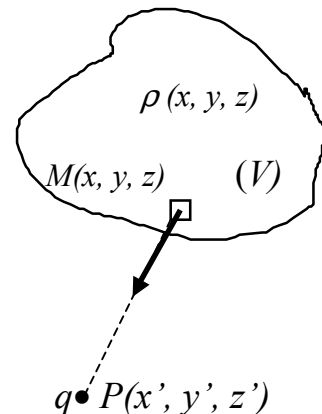
- densité linéique de charges : $\lambda(x, y, z) = \frac{dq}{d\ell}$ C/m

Et, en vertu du principe de superposition, l'action du volume V sur une charge q quelconque placée en P de coordonnées (x', y', z') s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{MP^2(x, y, z)} \cdot dV \cdot \vec{u}_{MP}$$

ou

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{MP^2(x, y, z)} \cdot dV \cdot \vec{u}_{MP}$$



Exemples :

disque chargé

→ soit $\sigma = \text{cste}$ soit "une charge Q uniformément répartie"

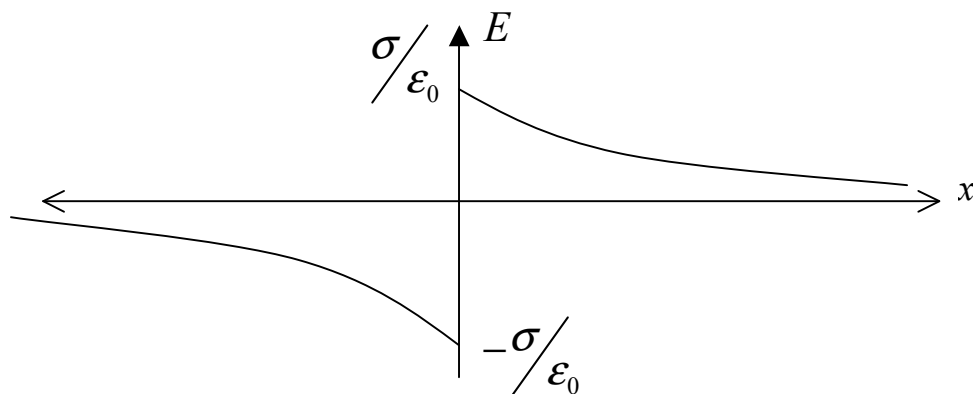
→ $dS = r.dr.d\theta$ $MP^2 = r^2 + x^2$ $\cos\theta = x/(r^2 + x^2)^{1/2}$

$$\rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left[\pm 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

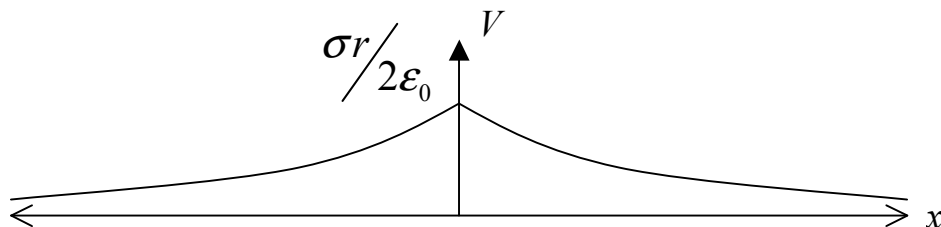
$$\rightarrow V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma dS}{PM} \rightarrow V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + x^2} - |x|)$$

→ on peut retrouver E à partir de

→ E est discontinu au franchissement du disque :



→ V est TOUJOURS continu au franchissement de



→ on peut donner une forme non constante à σ

Autre exemple : fil infini chargé par λ

1.2. Propriétés du champ électrique \vec{E}

a) **La circulation du champ électrique** d'un point P_1 à un point P_2 est indépendante du chemin choisi :

$$\boxed{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = cste}$$

On appelle :

- la fonction **potentiel** : $V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ (intégrale indéfinie)

(Ce calcul fait intervenir une constante)

- la **différence de potentiels** : $\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (V(P_2) - V(P_1))$

- relation inverse : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$

disque : $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + x^2} - |x|) \quad \rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left[\pm 1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$

b) **Le flux du champ électrique E** à travers une surface fermée S quelconque vaut $1 / \epsilon_0$ fois la charge totale contenue dans le volume V délimité par la surface S :

Théorème de Gauss :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\text{charges dans } V}{\epsilon_0}$$

ou $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_V \rho \cdot dV}{\epsilon_0}$

V étant le volume délimité par S

Exemples :

- sphère chargée en volume
- Disque chargé : comparer au calcul précédent avec $R \rightarrow \infty$
- Fil infini : idem

2. Rappels de magnétostatique

2.1. Le courant électrique

courant électrique = tt mvt d'ensemble de particules chargées

Le déplacement des porteurs de charges se fait dans un milieu à 3 dimensions → concept de **densité de courant**

vecteur densité de courant :

on considère : - $\Delta\mathbf{S}$, une surface orientée

- ρ , la densité de charges par unité de volume

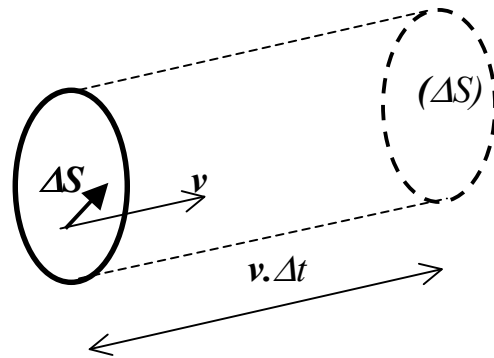
- \mathbf{v} , la vitesse moyenne des charges

- Δt un intervalle de temps quelconque

→ la quantité de charges ΔQ qui traverse $\Delta\mathbf{S}$ pendant Δt est équivalente à la charge enfermée dans le volume fictif:

$$\Delta V = \Delta\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \cdot \Delta t$$

soit :
$$\Delta Q = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot (\Delta\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \cdot \Delta t$$



→ on définit le vecteur **densité de courant** :

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

et donc
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \vec{J} \cdot \vec{\Delta S} = \text{le flux de } \mathbf{J} \text{ à travers } \Delta\mathbf{S}$$

REM : - s'il y a plusieurs types de charges mobiles :
$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \cdot \mathbf{v}_i$$

• **Courants permanents**

Dans le cas général, si l'on considère un volume V délimité par une surface S , on a :

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV$$

Equation de continuité

Le flux de \vec{J} représente la quantité de charges qui entre ou sort du volume

Régime permanent ou stationnaire (courant **indépendant du temps**)

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

"en régime permanent \vec{J} est à flux conservatif"

REMARQUES :

1/ $\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ n'entraîne pas $v = \text{cste}$ ou $\rho = \text{cste}$!

Exemple : Diode à vide

→

2/ L'intensité I d'un courant dans un conducteur de section S est le flux de \vec{J} à travers S .

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Au 3^{ème} semestre

$$3/ \oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{J} \cdot dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \cdot dV$$

⇒

$$\boxed{\text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Equation de continuité

• **Ligne et tube de courant**

- une **ligne de courant** est telle qu'elle est tangente en tout point à \mathbf{J}

REM : en rég. permanent ces lignes \equiv la trajectoire des charges

- un **tube de courant** est la surface engendrée par des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

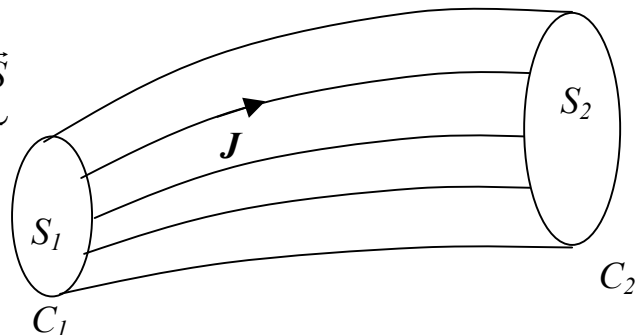
PROPRIETE : en rég. permanent, l'intensité du courant est la même à travers toute section d'un tube de courant car \mathbf{J} est à flux conservatif:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_\ell} \vec{J} \cdot d\vec{S}}_{=0}$$

$$\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -I_1 + I_2 = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2$$



- un **tube élémentaire de courant** est un tube s'appuyant sur une surface élémentaire dS . On a alors :

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

D'un point de vue pratique,

on a vu : source électrostatique $\rightarrow \rho \cdot dV$

on verra : source magnétostatique $\rightarrow \mathbf{J} \cdot dV$

On sera donc souvent amené à considérer la quantité $\mathbf{J} \cdot dV$. Il sera alors commode de décomposer l'espace en tubes élémentaires, de sommer le long d'un tube et d'intégrer sur tous les tubes.

$$\mathbf{J} \cdot dV = \mathbf{J} \cdot (d\mathbf{S} \cdot d\ell)$$

$$\mathbf{J} \cdot dV = (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}) \cdot d\ell$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} \cdot dV = dI \cdot d\vec{\ell}}$$

2.2. Force magnétique et Champ magnétique

Il y a manifestation de la force magnétique chaque fois qu'une charge est en mvt dans un champ magnétique :

- **Charge en mouvement:**

$$\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

- **Courant filiforme :**

$$d\vec{f} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{f} = \oint_C Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_C \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Exemples de calculs de champs magnétiques (préciser les lignes de champ)

au voisinage d'un fil infini : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \vec{e}_\theta$

le long de l'axe d'une spire : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \cdot \vec{n}$

le long de l'axe d'un solénoïde fini: $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \cdot \vec{n}$

le long de l'axe d'un solénoïde infini: $\vec{B} = \mu_0 n I \cdot \vec{n}$

- **Déplacement d'un ensemble de charges**

On a vu : $\vec{J} \cdot dV \equiv dI \cdot d\vec{\ell}$

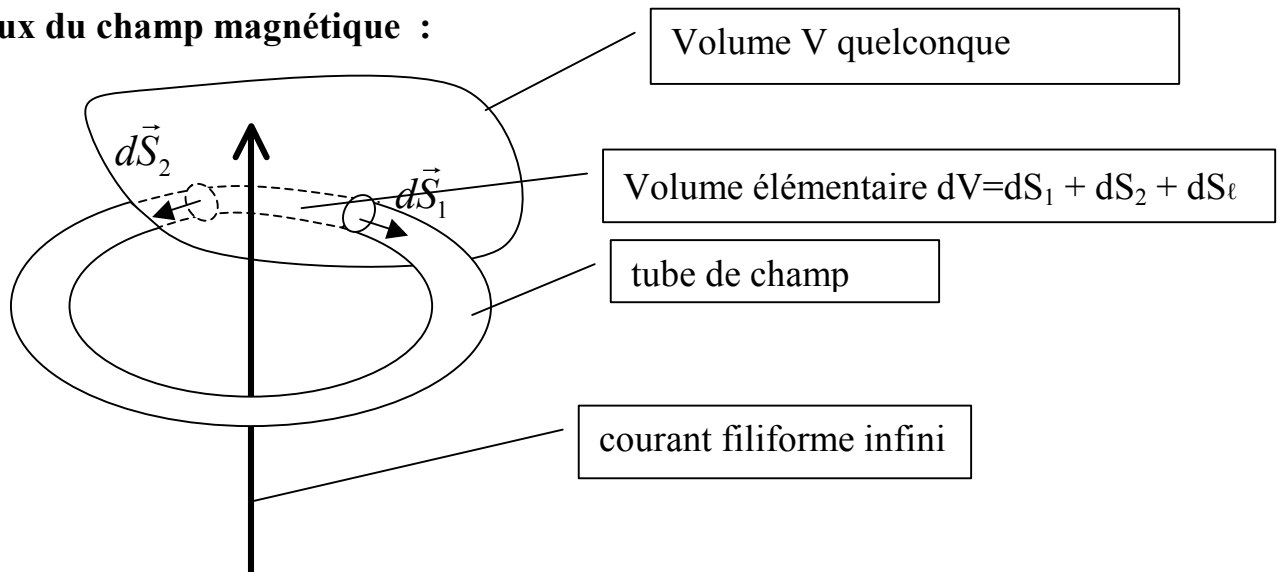
$$\Rightarrow \vec{f} = \iiint_V \vec{J} \wedge \vec{B} \cdot d\tau$$

$$\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau$$

Exemple : Roue de Barlow

2.3. Propriétés du champ magnétique :

- Flux du champ magnétique :



Le flux élémentaire à travers le volume élémentaire dV se décompose en :

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{S}_\ell}_{=0}$$

symétrie de révolution autour du fil

\Rightarrow flux à travers toute section dS du tube élémentaire est constant

$$\Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 = -\vec{B} \cdot d\vec{S}_2$$

On peut décomposer V en autant de tubes élémentaires qu'on le souhaite :

$$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ est à flux conservatif}$$

- Circulation du champ magnétique

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \sum_{\text{int.}} I$$

Théorème d'Ampère

Exemples :

fil infini; conducteur cylindrique

2.4. Potentiel vecteur du champ magnétique

- **Définition**

Par analogie avec l'électrostatique on va définir un potentiel "magnétique".

Compte tenu des propriétés de B (lignes fermées-flux conservatif) ce potentiel est un vecteur :

- **Expression du potentiel vecteur dans le cas d'un circuit filiforme**

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot d\vec{\ell} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell}}{r}}$$

- **Autre relation entre champ et potentiel**

$$\boxed{\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}$$

S étant une surface délimitée par le contour C

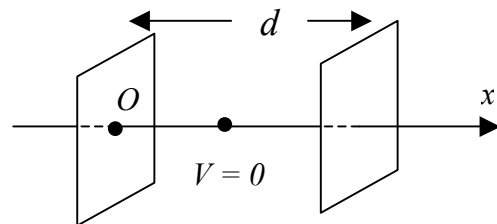
- **Exemple :**

Soit un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant d'intensité I . En calculant le flux du champ magnétique à travers une surface convenable, déterminez le potentiel vecteur du champ.

RESUME

	Electrostatique	magnétostatique
source de champ	charges fixes	charges en mouvement
action d'une source élémentaire	$d\vec{E} = \frac{1}{4\mu\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}$	$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$
circulation	conservative $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	non conservative $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$ (Ampère)
flux	non conservatif $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (Gauss)	conservatif $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
lignes de champ	- non fermées - peuvent diverger	- fermées - ne peuvent diverger
potentiel	scalaire $E = - \text{grad } V$	vecteur $B = \text{rot } A$

2. Profondeur de pénétration d'un plasma. Une région de l'espace, limitée par 2 plans parallèles à la distance d l'un de l'autre, est peuplée de charges q réparties uniformément à raison de n particules par unité de volume. L'origine est choisie sur la plaque de gauche et le potentiel nul en $x = d/2$.



- Par application du théorème de Gauss trouver le champ électrique d'abord à l'extérieur des plans, puis à l'intérieur.
- En déduire le potentiel en fonction de x , on posera : $V_0 = -nqd^2/8\epsilon_0$
- Tracer le champ et le potentiel en fonction de x

Une particule de charge q se déplace le long de l'axe Ox vers les x croissants. Elle pénètre dans l'espace entre les plans avec une vitesse v .

- quelle doit être la valeur minimale de cette vitesse pour que la particule ressorte de l'autre côté.

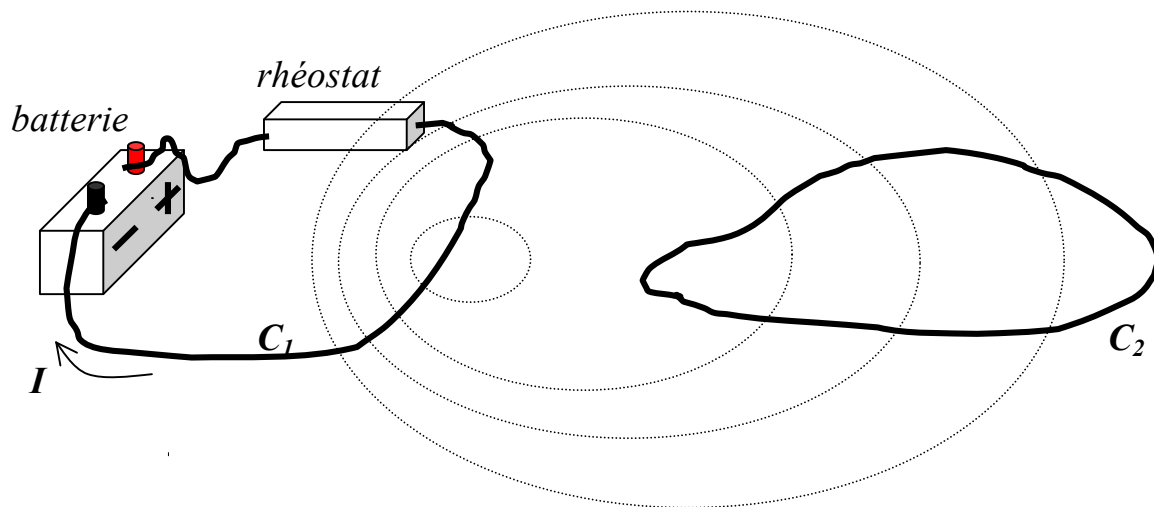
3. L'induction électromagnétique

3.1. Préambule

- Expériences de Faraday : montrer que si un courant est capable de produire un champ magnétique la réciproque est vraie.
- Découverte empirique : premières manifestations des champs variables
- L'induction magnétique: traduit les effets de la variation du flux de B

$$\Phi = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

variation de ϕ si variation de B
variation de S



C_1 : circuit inducteur
 I_1 : courant inducteur

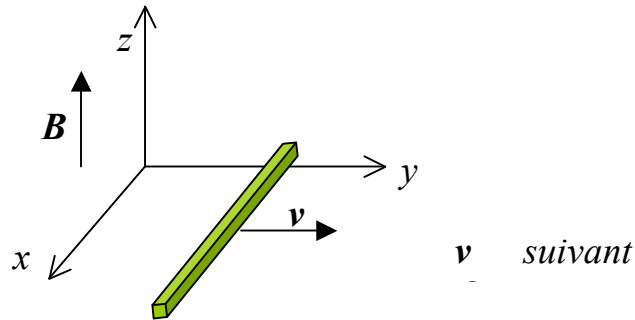
C_2 : circuit induit
 I_2 : courant induit dans C_2

- L'induction magnétique: c'est la production d'effets électriques par l'action magnétique
- L'induction magnétique : elle est à la base de l'électrotechnique : production et utilisation des courants électriques.

3.2. Déplacement d'un conducteur filiforme dans un champ B indépendant du temps

- Tige conductrice

B suivant



→ La tige conductrice contient des charges libres...

... qui sont mises en mouvement (vitesse v) dans un champ magnétique (B).

→ elles sont donc soumises à la force magnétique : $f_m = qv \wedge B$

→ on choisit d'écrire la force f_m sous la forme suivante : $f_m = qE_m$

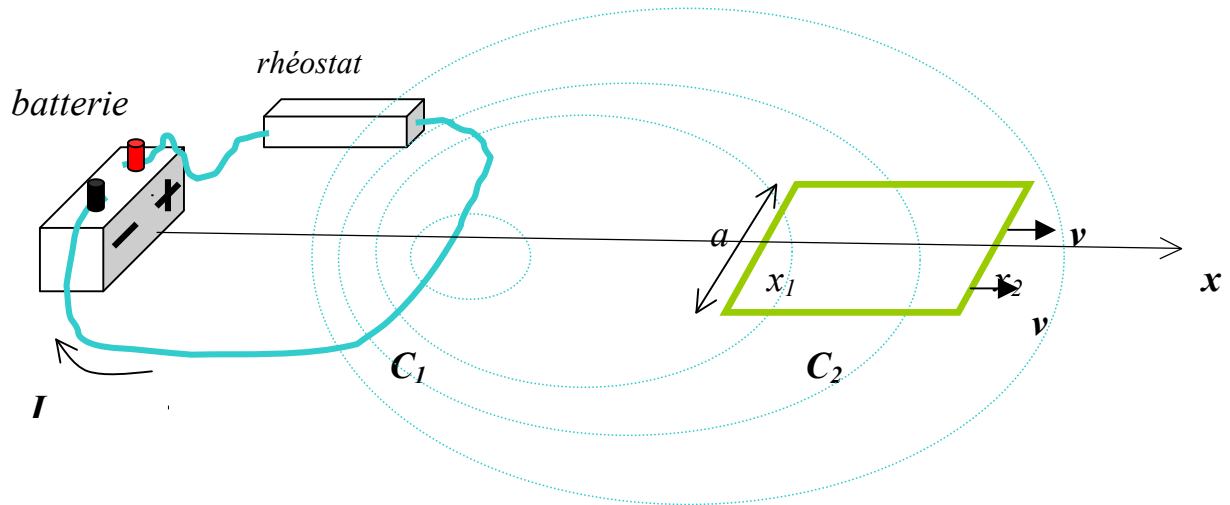
→ On donne le nom de "champ électromoteur" au champ : $E_m = v \wedge B$

→ E_m ne doit pas être confondu avec le champ de Hall E_H

→ Si v et B sont constants \Rightarrow l'équilibre est maintenu entre les 2 forces magnétiques et électriques (effet Hall) :

$$f_m = -f_e$$

- Boucle conductrice



La boucle C_1 crée un champ magnétique non homogène...

... la boucle rectangulaire C_2 se déplace dans ce champ magnétique ...

⇒ **apparition d'un courant dans la boucle C_2**

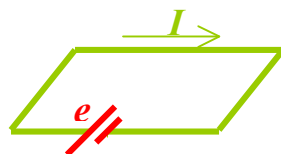
Le long des deux brins \perp au déplacement, il apparaît 2 champs électromoteurs E_m

$$E_{m1} = v \wedge B_1 \quad \text{et} \quad E_{m2} = v \wedge B_2$$

J'appelle e la circulation du champ électromoteur le long de la boucle C_2 :

$$e = \oint_{C_2} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = v \cdot (B(x_1) - B(x_2)) \cdot a$$

a la dimension d'une différence de potentiels et tout se passe comme si un générateur de *f.e.m.* e était placé dans C_2 :



Si B homogène $\rightarrow B(x_1) = B(x_2) \rightarrow$ séparation des charges mais pas de courant

3.3. Force électromotrice d'induction – loi de Faraday

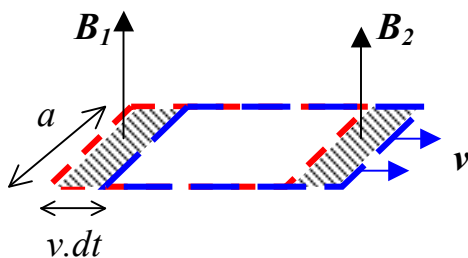
Définition :

Dans le cas général, on appellera *force électromotrice d'induction* la quantité :

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

Remarque : $\Gamma \neq 0 \Rightarrow \vec{E}_m$ n'est pas un champ électrostatique
 $\Rightarrow \vec{E}_m \neq -\vec{\text{grad}} V$

→ Variation du flux $d\Phi$ lors du déplacement élémentaire dy de la spire :



$$dy = v \cdot dt$$

$$\text{position (1)} \rightarrow \Phi_1$$

$$\text{position (2)} \rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 + B_2 a v \cdot dt - B_1 a v \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = -(B_1 - B_2) \cdot a \cdot v$$

Si on compare cette expression de $d\Phi/dt$ et celle de la *f.e.m.* e on obtient :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

REM : le signe "-" traduit la **loi de Lenz** :

« le courant induit, produit par la *f.é.m.* e , a un sens tel qu'il s'oppose, par ses effets, aux causes qui lui ont donné naissance »

3.4. Loi de Faraday

Généralisation à tout circuit soumis à une variation de flux :

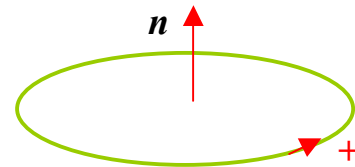
$$\Rightarrow \boxed{e = - \frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{loi de Faraday}$$

« la force électromotrice d'induction = la variation du flux à travers le circuit »

→ REMARQUE :

Pour appliquer la loi de Faraday il faut :

a) orienter le circuit (sens positif)

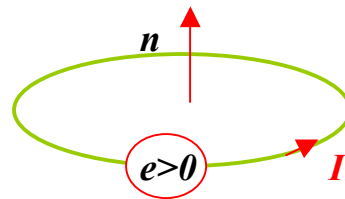


(il est bien sûr intéressant de choisir \mathbf{n} dans le même sens que \mathbf{B})

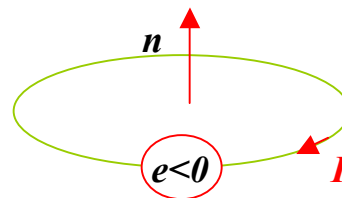
b) évaluer algébriquement le flux ϕ : si \mathbf{B} et \mathbf{n} de même sens : $\phi > 0$
si \mathbf{B} et \mathbf{n} de sens contraire : $\phi < 0$

c) évaluer le signe de $d\phi/dt$, puis de $e = - d\phi/dt$

Si $e > 0$ I est dans le sens +



Si $e < 0$ I dans le sens -

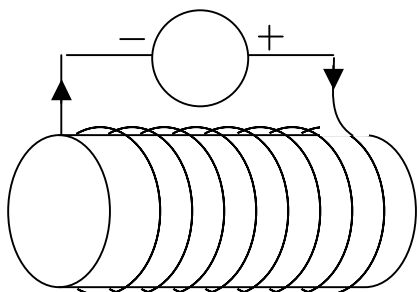


→ Analyse dimensionnelle :

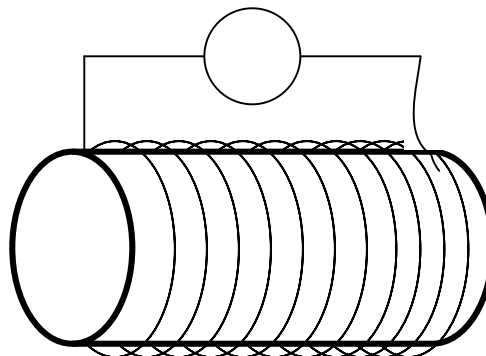
$$\begin{aligned} B = E / \text{vitesse} &\Rightarrow [B] = V.T / L^2 && \text{(le Tesla)} \\ &\Rightarrow [\Phi] = V.T / L^2 \times L^2 = V.T && \text{(le Weber)} \\ &\Rightarrow [d\Phi/dt] = V.T / T = \text{Volts} \end{aligned}$$

• Exemples

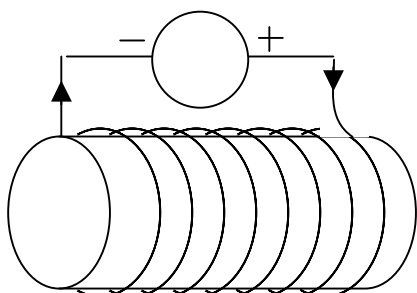
I augmente



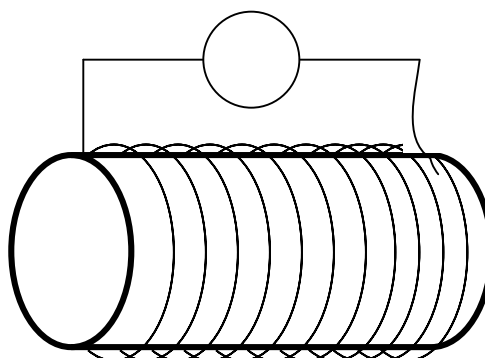
sens de I ?



I diminue



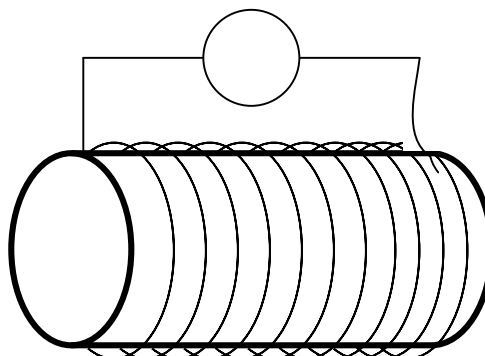
sens de I ?



l'aimant se rapproche



sens de I ?



Solénoïde ou aimant sont les inducteurs

- la bobine est l'induit

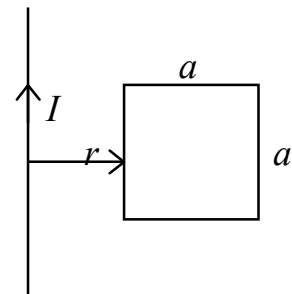
3.5. Travaux Dirigés – Induction

1. Courant induit dans une bobine tournante. Une bobine plate, circulaire, de rayon r , comportant N spires, tourne autour d'un axe fixe de son plan à une vitesse angulaire constante ω . Elle est placée dans un champ magnétique \mathbf{B} uniforme perpendiculaire à l'axe de rotation.

- Calculez le courant induit, R étant la résistance totale du circuit contenant la bobine.
- Si le champ magnétique est variable, déterminez le pour que le courant induit soit nul à tout instant. Considérez deux cas, a) seul le module varie, b) seule la direction varie.

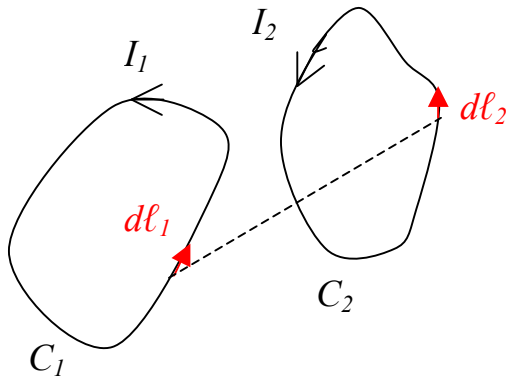
2. Courant induit dans un circuit carré. Considérez une spire carrée de côté a qui se déplace dans un plan horizontal avec une vitesse v . Dans l'espace règne un champ magnétique \mathbf{B} permanent, uniforme et vertical.

- Déterminez la f.e.m. induite dans le carré.
- Le champ magnétique est maintenant produit par un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant d'intensité I et orienté de telle manière qu'il soit dans le plan du carré. On déplace le carré avec une vitesse de module v perpendiculairement au fil (la position du cadre est repérée par r). Déterminez la f.e.m. induite dans le carré :
 - en exprimant la variation du flux (loi de Faraday)
 - en exprimant la circulation du champ *électromoteur* suivant le carré.



3.6. Circuits filiformes – Coefficients d'induction

- Coefficient d'induction mutuelle de 2 circuits filiformes



$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\text{avec : } \vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{12}}$$

Les 2 intégrations portent sur des variables indépendantes

\$\Rightarrow\$

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}}$$

ou encore :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{21} I_1$$

avec :

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2}{r_{12}} = M_{12}$$

\$M_{21}\$ est le coefficient d'induction mutuelle des 2 circuits

\$M_{21}\$ est une grandeur purement géométrique

Unité : le Henri (H)

- **Coefficient d'auto-induction**

→ Un circuit C crée un champ \vec{B} proportionnel à I

→ le flux de ce champ à travers le circuit qui l'engendre est aussi proportionnel à I

$$\Phi = L.I$$

L = coefficient d'auto-induction / inductance propre / self inductance

L ne dépend que de la géométrie

L est toujours positif

- **Matrice inductance**

Pour un système de n circuits, le flux total Φ_i à travers le circuit C_i est :

$$\Phi_i = L_i I_i + \sum_{j \neq i}^n M_{ij} I_j = \sum_{j=1}^n M_{ij} I_j \quad \text{avec } L = M_{jj}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n2} & M_{n2} & M_{n3} & \dots & L_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_n \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique

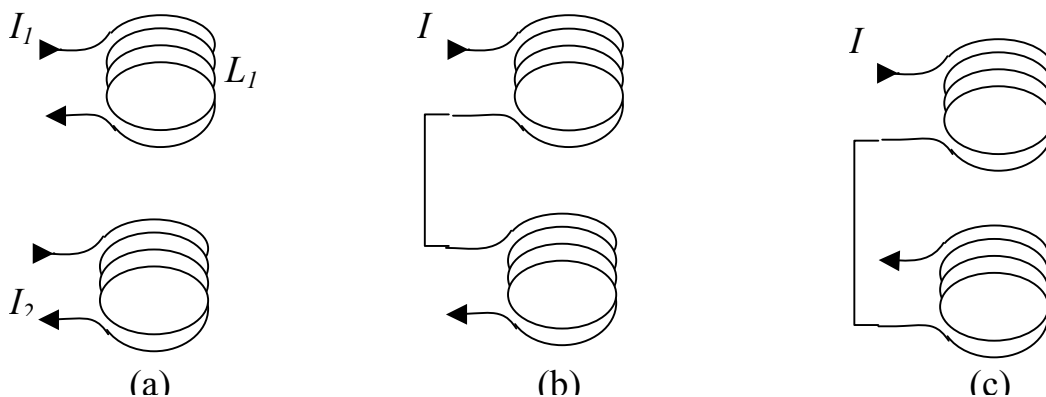
• **Exemple :** Inductance propre d'une bobine torique

a) Inductance propre d'une bobine formée de N spires enroulées sur un tore à section rectangulaire de rayon intérieur a , de rayon extérieur b et de hauteur h .

b) Un fil infini coïncide avec l'axe de symétrie de la bobine. Calculez le coefficient d'inductance mutuelle du fil et de la bobine et vérifiez que $M_{12} = M_{21}$.

3.7. Travaux dirigés – Coefficients d'induction

1. Inductances combinées. La partie *a*) de la figure ci-dessous définit les deux bobines par leur self, L_1 et L_2 et leur position par l'inductance mutuelle M . Déterminez les f.e.m. de chacune de ces bobines. Exprimez également les self-inductances L' et L'' (figures *b* et *c*) en fonction de M , L_1 et L_2



2. Inductance propre d'un solénoïde

On considère un solénoïde constitué par un cylindre de rayon R et de longueur $2l$ sur lequel on a bobiné N tours de fil. En confondant le champ magnétique dans le plan de chaque spire avec sa valeur sur l'axe, calculez l'inductance de ce solénoïde. Examinez le cas $l \gg R$.

Rappel: *champ magnétique en un point M de l'axe* : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$ (cours EM2).

3.8. Rappel d'électrocinétique - circuit contenant une bobine

- **Effet selfique**

Maintenant l'inducteur et l'induit sont confondus. On considère :

un circuit C_1 fermé	—————>	auto-inductance L
parcouru par i	—————>	source de \vec{B} et $\phi = Li$
si i est variable	—————>	\vec{B} variable \Rightarrow flux variable \Rightarrow source de \vec{E}_m

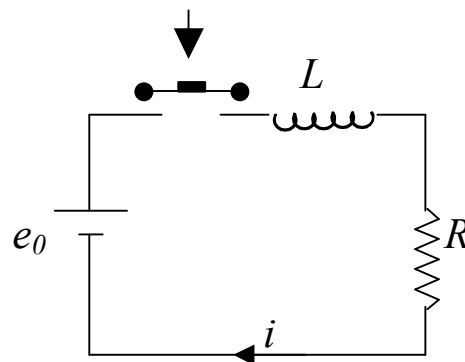
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

- **self-inductance (composant) dans un circuit**

D'une manière générale :

$$R = R_{\text{géné}} + R_{\text{fil}} + R_{\text{bobine}}$$

$$L = L_{\text{bobine}} + L_{\text{circuit}}$$

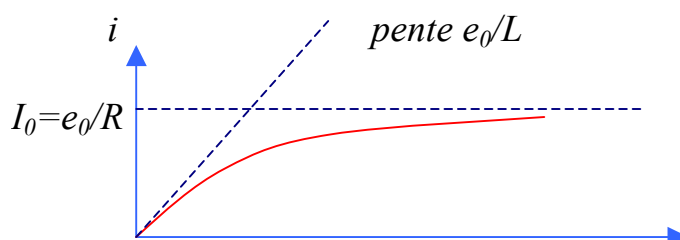


Forces électromotrices du circuit : $e_0 = \text{batt.}$ $\left| \begin{array}{l} \longrightarrow e_0 - L \frac{di}{dt} = Ri \\ \longrightarrow e_0 = Ri + L \frac{di}{dt} \end{array} \right.$

Lorsqu'on ferme l'interrupteur, i varie de 0 à I_0 , état final : $e_0 = RI_0$

A $t = 0$ on considère $Ri = 0 \Rightarrow di/dt = e_0/L \Rightarrow L$ limite la variation de i et compense par e

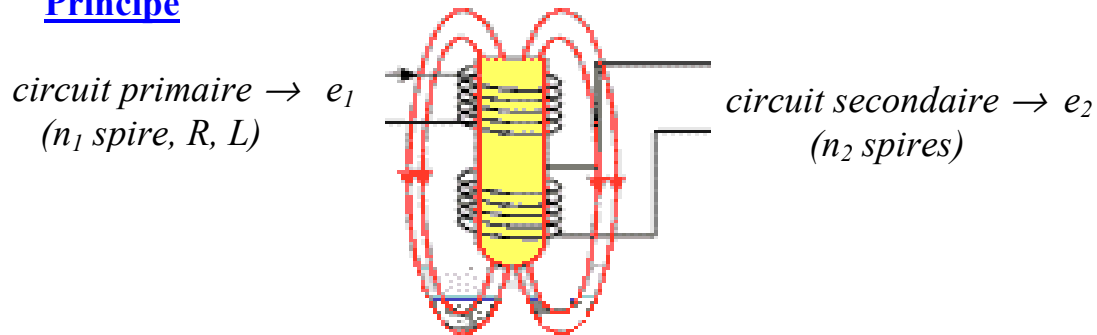
Résolution de l'équation du circuit $\longrightarrow i = \frac{e_0}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$



3.9. Applications

- Le transformateur

Principe



- On applique une *f.e.m.* variable e_1 au primaire : $e_1 - \frac{d\phi_1}{dt} = R_1 \cdot I_1$
- Soit φ le flux du champ \mathbf{B} dans **une** spire du primaire $\rightarrow n_1$ spires $\Rightarrow \phi_1 = n_1 \cdot \varphi$

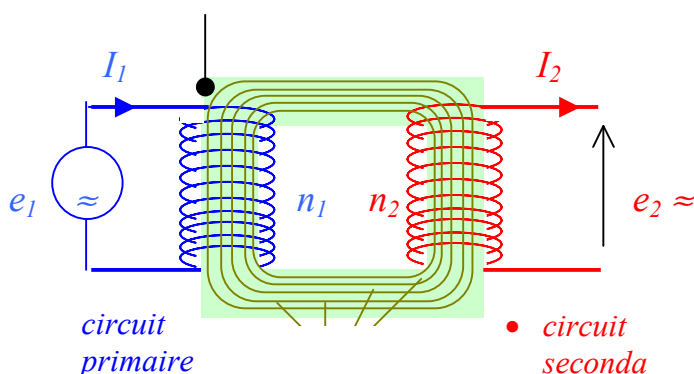
1^{ère} approximation :

$$\mathbf{B} \text{ reste le même dans le secondaire} \rightarrow \phi_2 = n_2 \cdot \varphi$$

$$\text{et dans le secondaire apparaît :} \rightarrow e_2 = - \frac{d\phi_2}{dt}$$

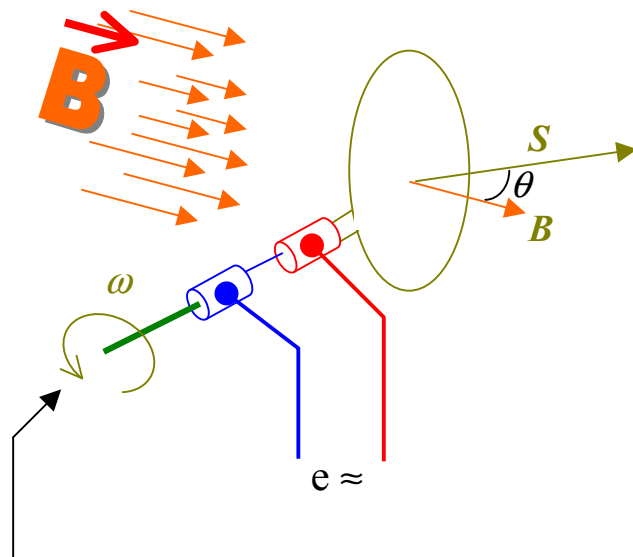
2^{ème} approximation: $R_1 \approx 0 \Rightarrow e_1 \approx \frac{d\phi_1}{dt} \Rightarrow$

- Application



Le **matériau ferromagnétique** guide les **lignes de champ** du **primaire** dans le **secondaire**

- L'alternateur

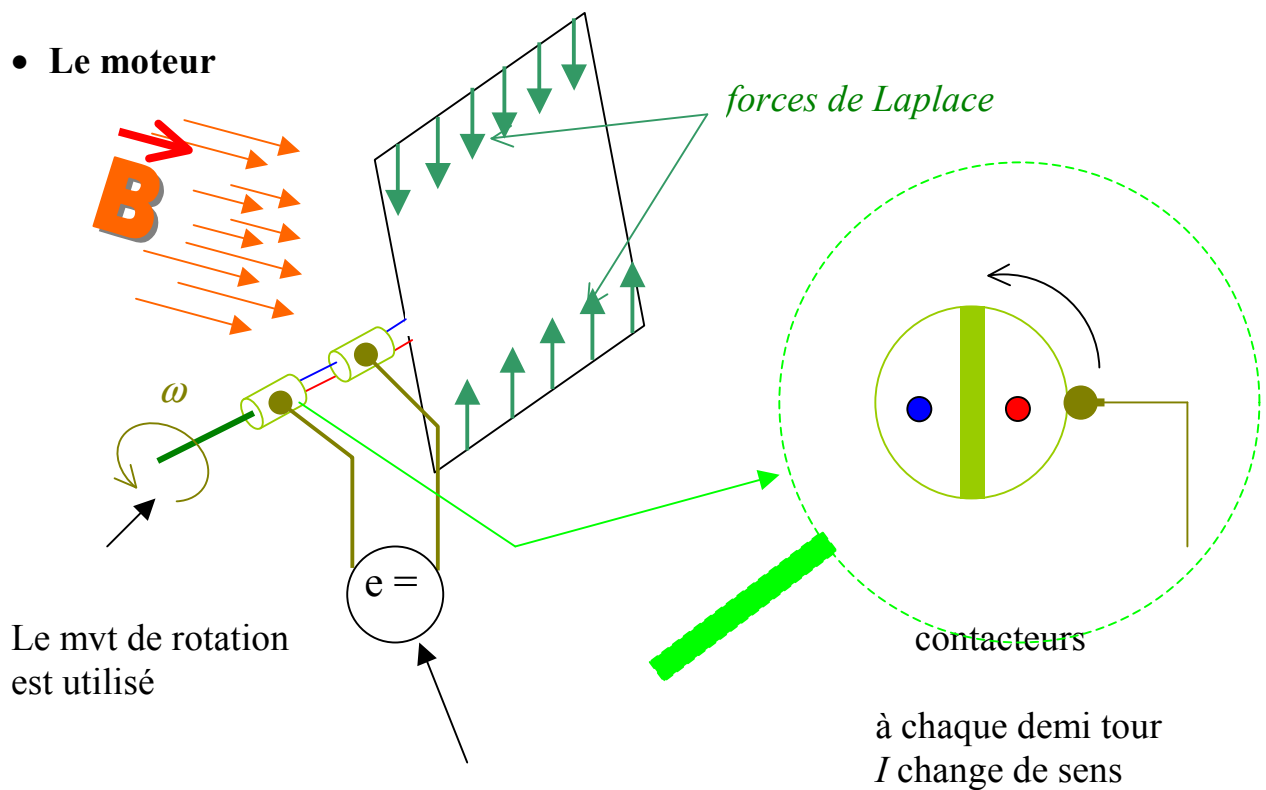


$$\phi = N \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = NBS \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$|e| = NBS\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Le mouvement mécanique est produit par des turbines (centrales thermiques, nucléaires, hydraulique, éolienne ...) ou par une roue de bicyclette...

- Le moteur



la bobine est alimentée par une tension continue

3.10. Circuit non-filiforme : Courants de Foucault

Masse métallique soumise aux phénomènes d'induction

courants induits dans la matière

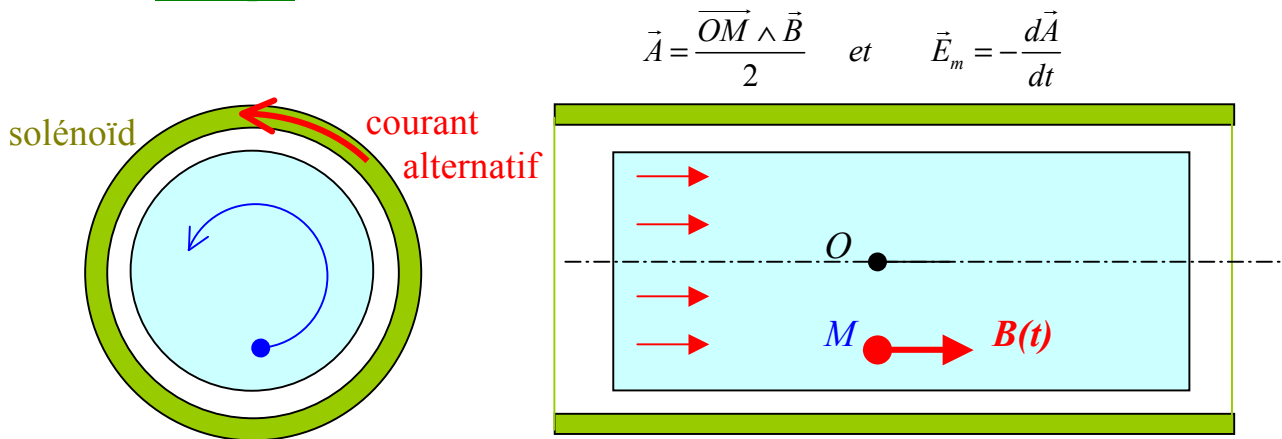
courants de Foucault

Au champ électromoteur E_m ($v \wedge B$ ou $-dA/dt$), induit dans la masse, correspond une densité de courant :

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}_m$$

↘ conductivité de la masse métallique

→ **Exemple : four à induction**



La charge libre en M est mise en mvt à cause du champ variable → chauffage

→ **Exemple : frein magnétique**

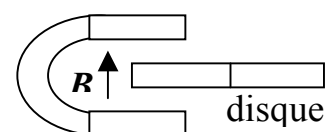
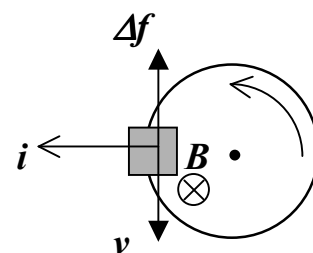
- Le disque métallique est en rotation.
 - L'aimant produit un champ B dans le volume $\Delta\tau$
 $v + B \rightarrow E_m : E_m = -vB \cdot i$

- il apparaît des courants de Foucault : $J = -\gamma E_m \cdot i$

- Le volume $\Delta\tau$ subit alors la force :

$$\Delta f = J \wedge B \Delta\tau = -\gamma B^2 \Delta\tau \cdot v$$

force de freinage



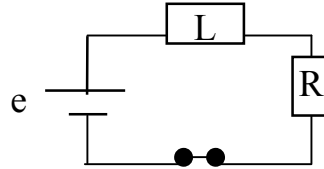
4. Travail des forces de Laplace

5. Energie magnétique

5.1. Circuits filiformes

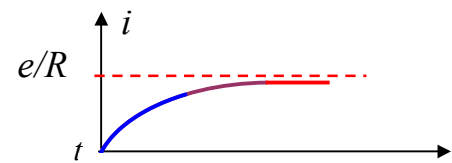
A. - établissement du courant dans le circuit :

à $t = 0$ on a : $e = Ri + L \frac{di}{dt}$



$$i = \frac{e}{R} (1 - e^{-R/Lt}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} i = \frac{e}{R} = I_0$$

phase transitoire *phase permanente*



- bilan de puissance :

le générateur lutte contre la résistance du circuit et la f.e.m. de l'inductance

$$e.i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

puissance fournie \nearrow puissance dissipée \nwarrow puissance nécessaire pour vaincre les effets d'induction

- énergie dépensée durant la phase transitoire :

$$W = \int_0^{\infty} Li \frac{di}{dt} dt = \int_0^{I_0} Li \cdot di = \frac{1}{2} LI_0^2$$

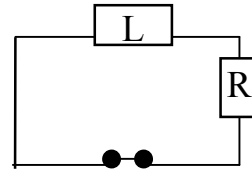
$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} LI_0^2$$

L'énergie $\frac{1}{2} LI_0^2$ est stockée par l'inductance

L'énergie $Ri^2 \cdot t$ dissipée par effet Joule est perdue.

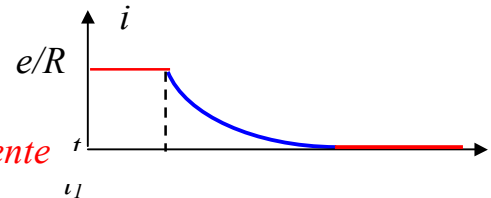
B. - coupure du courant dans le circuit :

à $t = t_1$ on éteint le générateur : $0 = Ri + L \frac{di}{dt}$



solution : $i = \frac{e}{R} e^{-R/L(t-t_1)}$
phase transitoire

$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} i = 0$
phase permanente



- bilan de puissance :

$$0 = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

$e = 0$ pourtant $i \neq 0$ et de l'énergie est dissipée dans la résistance

- énergie dissipée durant la phase transitoire :

$$W = \int_{t_1}^{\infty} Ri^2 dt = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-\frac{2R}{L}(t-t_1)} dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

L'énergie $\frac{1}{2} LI_0^2$ est restituée puis perdue par effet Joule : RI_0^2

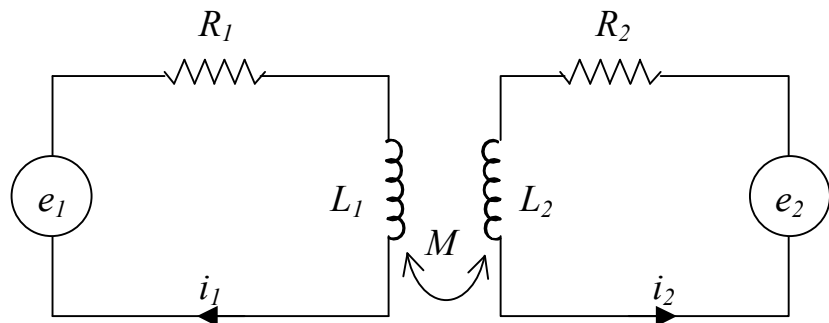
→ Conclusion : un circuit *selfique* est capable d'emmagasiner et de restituer de l'énergie en régime variable. Cette énergie s'écrit à chaque instant :

$$W = \frac{1}{2} Li^2$$

et est appelée énergie magnétique du circuit.

5.2. Association de circuits filiformes

- cas de 2 circuits



$$e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

- énergie fournie à l'instant t : $W_f = \int_0^t (e_1 i_1 + e_2 i_2) dt$

- énergie perdue à l'instant t : $W_p = \int_0^t (R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2) dt$

- énergie stockée à l'instant t :

$$W_s = \int_0^t \left[L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt} \right) \right] dt$$

$$\Rightarrow W_s = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

ou encore avec les flux : $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$

$$\Rightarrow W_s = \frac{1}{2} (i_1 \Phi_1 + i_2 \Phi_2)$$

- cas de n circuits

(C_1)	(C_2)	(C_n)	
i_1	i_2	i_n	
Φ_1	Φ_2	Φ_n	

$$\Rightarrow W_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n i_j \Phi_j$$

- flux à travers le

5.3. Circuits non filiformes

- **démonstration 1**

- **courant volumique** : distribution de courant caractérisée en tout point par le vecteur densité de courant \vec{J}

- **sur un tube élémentaire**

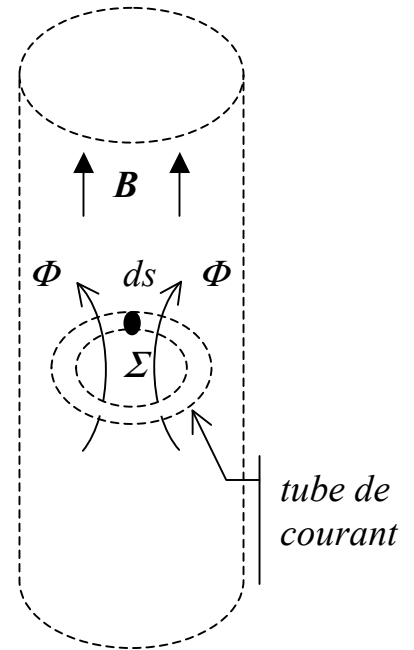
- énergie stockée par le tube él. : $dW = \frac{1}{2} \Phi_{\Sigma} di$

- courant dans le tube él. : $di = \vec{J} \cdot d\vec{s}$

- flux à travers le tube él. : $\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

$$\Rightarrow \Phi \cdot di = \oint_{tube} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \cdot \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow W_s = \frac{1}{2} \iiint_{cylindre} \vec{A} \cdot \vec{J} d\tau$$



W est l'énergie magnétique de la distribution de courant

W est l'énergie stockée par la distribution de courant

- **démonstration 2**

- courant volumique distribution de courant caractérisée en tout point par le vecteur densité de courant \vec{J}

- un porteur de charge subit : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

- travail de cette force : $q\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow$ ne travaille pas

$$q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- puissance fournie par la source par unité de volume aux particules :

$$n \vec{f} \cdot \vec{v} = nq\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{J} \cdot \vec{E}$$

- pour toute la distribution de volume V :

$$P = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau = -\iiint_V \vec{J} \cdot \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot d\tau - \iiint_V \vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\tau$$

- travail effectué pendant dt :

$$dT = -\iiint_V (\vec{J} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot dt) \cdot d\tau = -\iiint_V \vec{J} \cdot d\vec{A} \cdot d\tau$$

à ce travail correspond l'énergie stockée : $dW = -dT$

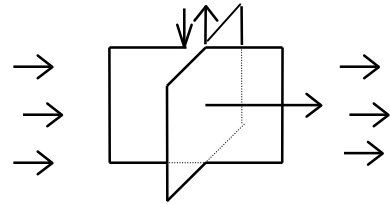
\Rightarrow Dans le vide, ou dans les conducteurs, de l'énergie peut être stockée sous forme magnétique et cette énergie est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{A} \cdot d\tau$$

**énergie magnétique
de la distribution de courant**

5.4. Travaux Dirigés

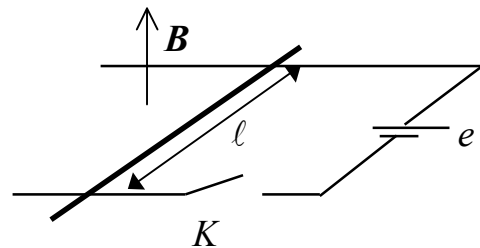
1. Flux maximal. Le dispositif ci-contre, constitué de deux cadres conducteurs carrés orthogonaux de côtés a , baigne dans un champ magnétique uniforme et se trouve initialement dans la disposition indiquée sur la figure, $\mathbf{B} // Ox$ (Ox étant un axe contenu dans le plan d'un des deux cadres).



- Calculer le flux magnétique à travers le dispositif dans sa position initiale.
- Le dispositif peut tourner autour de son axe vertical Δ . La rotation du double cadre est repérée par l'écart angulaire θ que fait l'axe Ox avec la direction du magnétique \mathbf{B} . Exprimer le flux magnétique à travers le dispositif en fonction de θ .
- Déterminer la ou les position(s) d'équilibre stable du système.

2. Glissement d'un rail sur deux rails fixes parallèles

Considérez le dispositif schématisé ci-contre. La résistance interne du générateur est égale à R . Considérez les deux cas suivants :



• 1^{er} cas $e = 0$

La barre glisse à vitesse constante v sans frottement sur les rails en s'éloignant du générateur.

- Exprimez la variation par rapport au temps du flux coupé en fonction de B , v et l .
- Donnez le sens et l'expression du courant induit dans le circuit lorsque l'on ferme K .

• 2^{ème} cas $e \neq 0$.

La barre est immobile et l'interrupteur K est fermé. En négligeant les frottements de la barre, déterminez les variations de sa vitesse de déplacement.

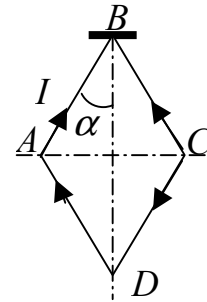
Montrez qu'elle tend vers une valeur limite.

3. Déformation d'une bobine. Un solénoïde de N spires non jointives, de surface S , de longueur au repos ℓ_0 , parcouru par un courant d'intensité I est lentement comprimé de façon à ce que sa longueur passe de ℓ_0 à ℓ_1 . Cette compression engendre une variation de son inductance propre L .

- Exprimez l'énergie magnétique W emmagasinée par ce solénoïde au repos (longueur ℓ_0)
- exprimez l'énergie supplémentaire emmagasinée ΔW en fonction de ΔL , puis en fonction de ℓ_0 à ℓ_1 lorsqu'on l'a comprimé (longueur ℓ_1) si on garde le courant constant
- Qui fournit cette énergie supplémentaire?
- Δe peut s'exprimer en considérant que le générateur doit compenser la variation de la force électromotrice $\Delta e'$ due à la compression du solénoïde $\Delta e'$. Exprimez $\Delta e'$.
- En écrivant le bilan d'énergie (fournie et emmagasinée) montrez qu'un troisième terme apparaît. A quoi correspond il?
- Calculez la force (déduite de l'énergie apparue au d)) qu'il faut exercer pour maintenir le solénoïde comprimé.

12. Equilibre dans un champ magnétique

Un circuit déformable sans frottement est constitué par un losange plan de côté $a = 10 \text{ mm}$ et articulé en A , B , C et D . Il est parcouru par un courant $I = 5.0 \text{ A}$ dont le sens est indiqué sur la figure. Le point B étant fixé, le circuit, dont le plan est vertical, est plongé dans un champ magnétique uniforme ($\|\vec{B}\| = 0.1 \text{ T}$), orienté comme indiqué sur la figure.



Chaque tige du losange pèse 0.5 g .

- Définir l'énergie potentielle du circuit dans le champ magnétique
- Définir l'énergie potentielle totale E_p du système
- Déterminer la position d'équilibre du circuit qui correspond à un minimum de E_p (valeur de α à l'équilibre). On posera $\sin \alpha = u$.

13. Paradoxe. Une spire circulaire de rayon R , d'axe Ox , comportant N tours de fil, parcourue par un courant I est plongée dans un champ magnétique de la forme suivante : $\vec{B} = B_0(1 + ax)\vec{i}$ où B_0 et a sont des constantes et \vec{i} le vecteur unitaire de l'axe Ox . Le centre de la spire est en x . Calculer la résultante des forces d'origine magnétique agissant sur la spire :

- en appliquant la loi de Laplace
- en appliquant le théorème de Maxwell

En utilisant une des 2 propriétés du champ magnétique démontrer que a est forcément nul et que les 2 calculs sont alors équivalents.

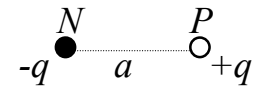
6. Dipôle électrostatique

6.1. Systèmes de charges ponctuelles

Faire la démonstration écrite au crayon

6.2. Le dipôle électrostatique – moment diélectrique

- un système de 2 charges $+q$ et $-q$ ($\Sigma q=0$)



- $a = PN$ est très petite devant toute autre distance ($P \neq 0$)

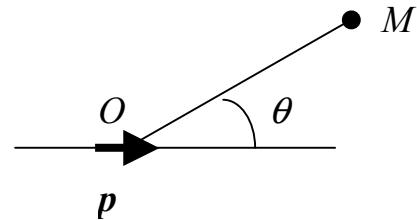
Ce système constitue un dipôle électrique de **moment dipolaire** : $\mathbf{p} = qNP$

(en C.m.)

Reprendre la calcul

- **Potentiel créé par un dipôle à grande distance**

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^2} \quad \text{soit} \quad \vec{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2}$$



avec $\mathbf{u} = \mathbf{OM}/OM$

- **Champ créé à grande distance**

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta$$

et

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} : \begin{cases} E_r = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

REMARQUE : V et \mathbf{E} sont parfaitement définis par \mathbf{p}

- **Exemple : 2 fils parallèles uniformément chargés**

6.3. Action d'un champ sur un dipôle

- **Cas d'un champ uniforme E_0**

Bilan des forces : $F = qE_0 - qE_0 = 0 \Rightarrow$ pas de mvt d'ensemble

Bilan des moments : $\Gamma = \mathbf{OP} \wedge q\mathbf{E}_0 - \mathbf{ON} \wedge q\mathbf{E}_0$

$$\Gamma = \mathbf{NP} \wedge q\mathbf{E}_0 = q\mathbf{NP} \wedge \mathbf{E}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 0 \quad \text{et} \quad \Gamma = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_0}$$

- **Cas d'un champ quelconque**

Bilan des forces $F = q(\mathbf{E}(P) - \mathbf{E}(N))$

\Rightarrow

Intéressons nous à une composante de F , $\rightarrow F_x = q(E_x(P) - E_x(N))$

Désignons par : x, y, z : les composantes de O milieu de NP

\Rightarrow

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$: les composantes de NP

\Rightarrow coordonnées de P : $x + \Delta x/2, y + \Delta y/2, z + \Delta z/2$

\Rightarrow coordonnées de N : $x - \Delta x/2, y - \Delta y/2, z - \Delta z/2$

Il vient :

$$F_x = q(E_x(x + \Delta x/2, y + \Delta y/2, z + \Delta z/2) - E_x(x - \Delta x/2, y - \Delta y/2, z - \Delta z/2))$$

En se limitant au premier ordre en $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ on obtient :

$$F_x = q\left(\Delta x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) \Rightarrow F_x = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad})E_x \Rightarrow \boxed{F = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}) \cdot \mathbf{E}}$$

REM : $\mathbf{p} \cdot \mathbf{grad}$ est équivalent à un opérateur : $p_x \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z}$

- **Bilan des moments** :

Dans une bonne approximation on peut conserver la même expression :

$$\Gamma = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}$$

- **Conclusion** :

Dans un champ non uniforme, le dipôle est soumis :

- à un couple qui tend à l'orienter suivant une ligne de champ
- à une force qui tend à le déplacer (pas forcément suivant une ligne de champ)

- **Exemple :**

Action mutuelle de 2 dipôles. Considérons deux dipôles permanents dont les moments \mathbf{p}_0 et \mathbf{p}_0' sont portés par le même axe Ox , et qui sont à la distance r l'un de l'autre. Les 2 dipôles sont soit parallèles soit antiparallèles. Calculer dans chaque cas la force qui s'exerce entre les 2 dipôles.

6.4. Travaux dirigés

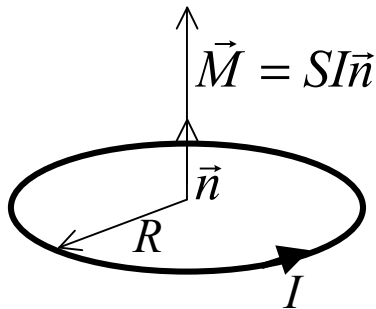
Champ uniforme + dipôle

Action et réaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle

7. Dipôle magnétique

7.1. Moment magnétique

- **Moment magnétique d'une spire circulaire**

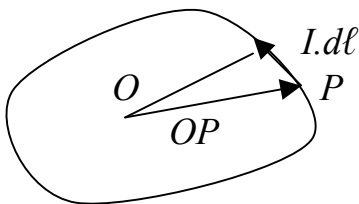


- Spire de rayon R parcourue par I
- Surface de la spire : $S = \pi R^2$
- Vecteur surface : $\vec{S} = S\vec{n}$

Le moment magnétique de la spire est : $\vec{M} = I\vec{S}$

- **Moment magnétique d'un circuit quelconque**

surface quelconque :
$$\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \overline{OP} \wedge d\vec{\ell}$$

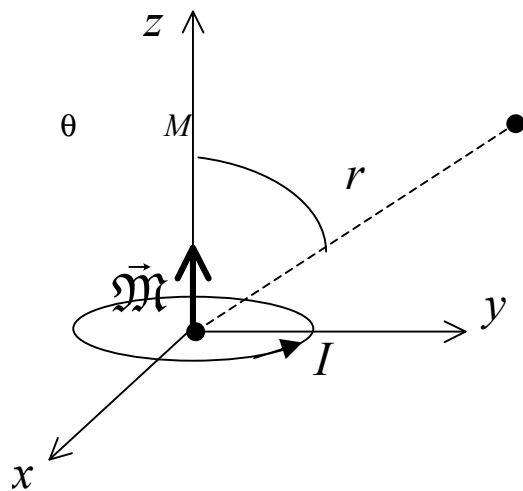


moment magnétique :
$$\vec{M} = \frac{1}{2} \oint \overline{OP} \wedge I d\vec{\ell}$$

- **Moment magnétique d'une distribution volumique de courant**

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \iiint_V \overline{OP} \wedge \vec{J} dV$$

7.2. Potentiel vecteur créé à grande distance par une spire



$$\vec{m} = I.S.\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OP} : (R, \pi/2, \varphi) \quad P \text{ ds le plan } xOy$$

$$\overrightarrow{OM} : (r, \theta, \pi/2) \quad M \text{ ds le plan } yOz$$

et $r \gg R$

- $I.d\vec{\ell}$ crée en M un champ dont le potentiel vecteur vaut :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{PM}$$

- Dans le repère $Oxyz$ on a :

$$\overrightarrow{OP} : \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OP} : \begin{pmatrix} -R \sin \varphi . d\varphi \\ R \cos \varphi . d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{OM} : \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} : \begin{pmatrix} -R \cos \varphi \\ r \sin \theta - R \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PM}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \sin \theta \sin \varphi = r^2 \left[1 - \frac{2R}{r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{R^2}{r^2} \right]$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2R}{r} \sin \theta \sin \varphi + \frac{R^2}{r^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi + \eta \left(\frac{1}{r^2} \right) \right)$$

$$\Rightarrow d\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{PM} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \begin{cases} -R \sin \varphi \cdot d\varphi \cdot \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ R \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \left(1 + \frac{R}{r} \sin \theta \sin \varphi\right) \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{avec : } \sin^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2 a = \pi$$

$$2 \sin b \cos b = \sin 2b \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin b \cos b = 0$$

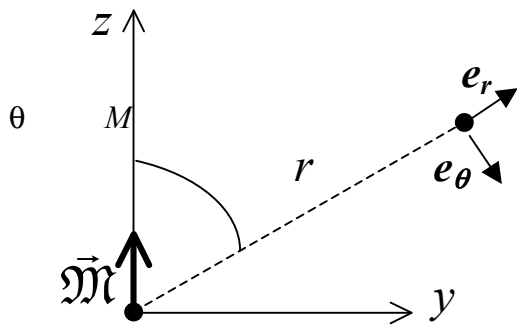
$$\Rightarrow \vec{A} = \oint_{\text{spire}} d\vec{A} \Rightarrow \vec{A} : \begin{cases} -\frac{\mu_0 IR^2}{4r^2} \sin \theta = -\frac{\mu_0 \mathbf{M} \sin \theta}{4\pi r^2} \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

En remarquant que :

- \vec{A} est colinéaire à \mathbf{e}_x
- $\vec{\mathbf{M}} \wedge \vec{r} \parallel \vec{e}_z$
- $\|\vec{\mathbf{M}} \wedge \vec{r}\| = r \cdot \sin \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \vec{\mathbf{M}} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r} \wedge \vec{\mathbf{M}}}$$

7.3. Champ magnétique créé par une spire circulaire



$$\vec{B} = r \vec{\text{rot}} \vec{A}$$

avec \vec{A} dans le repère (r, θ, φ)

REM :

- dans Oxyz $\rightarrow \vec{A}(A_x, 0, 0)$

- mais dans $(r, \theta, \varphi) \rightarrow \vec{A} : (0, 0, A_\varphi)$

$$r \vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{pmatrix} B_r = \frac{2\mu_0 \cdot \mathcal{M} \cdot \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 \cdot \mathcal{M} \cdot \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{pmatrix}$$

7.4. Lignes de champ du dipôle

Le déplacement élémentaire : $d\vec{M} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$

est colinéaire à : $B = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$

$$\Rightarrow \frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta}$$

avec :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_r = \frac{2\mu_0 \cdot \mathcal{M} \cdot \cos \theta}{4\pi r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 \cdot \mathcal{M} \cdot \sin \theta}{4\pi r^3} \\ B_\phi = 0 \end{cases}$$

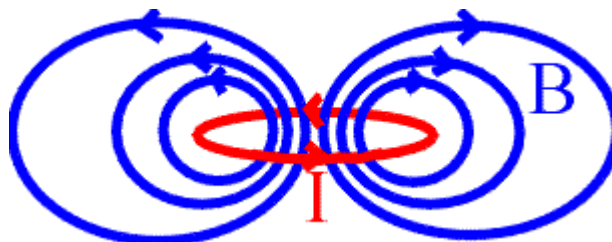
$$\Rightarrow r = k \times \sin \theta$$

et

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

\Rightarrow A est colinéaire à e_ϕ

\Rightarrow lignes de A sont des cercles centrés sur M



7.5. Actions mécaniques subies par un dipôle

- **Dans un champ uniforme**

Voir TD derrière

- **Dans un champ non uniforme**

$$\vec{F} = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

7.6. Exemple

- **Champ magnétique créé par une sphère en rotation.**

Une sphère de rayon R portant une densité surfacique de charges uniforme σ tourne autour de son diamètre Oz avec une vitesse angulaire ω . Calculez le moment magnétique de cette sphère.

7.7. Analogie moment électrique / magnétique : dipôle magnétique

Photocopie

7.8. Travaux dirigés