# Electromagnétique 4

# Equations locales
# Equations de Maxwell

# 1. I - Equations locales et aux champs

## 1.1. Divergence d'une fonction vectorielle

• La divergence associe un scalaire à une fonction vectorielle.

• Soit ***a*** un champ de vecteurs → ***a*** : $\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$

La divergence du vecteur ***a*** en coordonnées cartésiennes a pour expression :

$$div\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

## 1.2. Rotationnel d'une fonction vectorielle

• Le rotationnel associe un vecteur à une fonction vectorielle.

• Soit ***a*** un champ de vecteurs → ***a*** : $\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$ *et* $\boldsymbol{\nabla}$ : $\begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix}$

La divergence du vecteur ***a*** en coordonnées cartésiennes a pour expression :

$$rot\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{a}$$

ou encore :

$$rot\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix}$$

ou encore :

$$rot\ \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right).\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right).\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right).\vec{e}_z$$

## 1.3. Divergence et flux d'une fonction vectorielle

- **Signification physique de la divergence**

* L'idée consiste à exprimer **localement** le théorème de Gauss c'est-à-dire à calculer le flux de ***E*** à travers une surface fermée infinitésimale qui entoure un point *P* :

a) on considère un champ ***A*** et une surface quelconque *S*
b) on calcule $\Phi$***(A)*** à travers *S*
c) on réduit progressivement la taille de *S* et on calcule $\Phi(A)$ à chaque étape

$\rightarrow$ **impossible de trouver une limite inférieure à ce calcul !**

* On recommence l'opération en calculant cette fois-ci : $\dfrac{\oiint_S \vec{A}.d\vec{S}}{V}$,

*V* étant le volume engendré par la surface fermée *S* :

a) on réduit la dimension de *S,* donc de *V*, tout en calculant $\Phi$***(A)/V***

$\rightarrow$ on obtient une limite à cette valeur dès que le champ électrique peut être considéré comme homogène à l'intérieur du volume *V* réduit.

On définit alors la **divergence** comme la limite de ce rapport :

$$\boxed{div\vec{A} = \lim_{V\to 0} \frac{\oiint_S \vec{A}.d\vec{S}}{V}}$$

On sait que cette quantité existe et qu'elle est parfaitement définie.

Remarque :
opérateur divergence transforme : un **vecteur** $\rightarrow$ un **scalaire**.

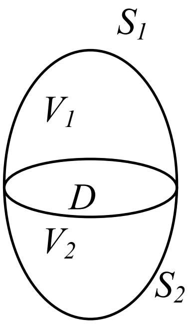
Mais comment l'utiliser pour exprimer le Théorème de Gauss localement ?

## 1.4. Théorème d'Ostrogradski

on considère : - un volume $V$ défini par la surface fermée $S$ qui l'entoure
- un champ $\boldsymbol{A}$

on sait calculer : $$\Phi = \int_s \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \Phi_S\ (A)$$

1- on divise $V$ en 2 sous volumes $V_1$ et $V_2$ de surfaces $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ et soit $D$ l'interface :




$$\Phi_{\Sigma 1}\ (\vec{A}) = \Phi_{S1}\ (\vec{A}) + \Phi_D\ (\vec{A})$$

$$+ \qquad \Phi_{\Sigma 2}\ (\vec{A}) = \Phi_{S2}\ (\vec{A}) + \Phi'_D\ (\vec{A})$$

$$\Phi_{\Sigma 1}\ (\vec{A}) + \Phi_{\Sigma 2}\ (\vec{A}) = \Phi_{S1}\ (\vec{A}) + \Phi_{S2}\ (\vec{A}) = \Phi_S\ (\vec{A})$$

car $\Phi_D\ (\vec{A}) = -\ \Phi'_D\ (\vec{A})$

2- on peut diviser maintenant $V$ en $n$ sous volumes $V_n$ de surface $S_n$ on obtiendra :

$$\Phi(\vec{A}) = \sum_n \Phi_n(\vec{A})$$

3 -on peut alors écrire : $$\Phi(\vec{A}) = \sum_n \iint_{S_n} \vec{A}.d\vec{\ell} = \sum_n V_n \frac{\iint_{S_n} \vec{A}.d\vec{\ell}}{V_n}$$

4 - en faisant tendre $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad V_n \to dV, \quad$ et $\quad \sum \to \iiint,$ on obtient alors:

$$\boxed{\oiint_S \vec{A}.d\vec{S} = \iiint_V div\vec{A}.dV}$$

## 1.5. Rotationnel et circulation d'une fonction vectorielle

- **Signification physique du rotationnel**

* Comme précédemment, l'idée consiste à exprimer localement la circulation du champ ***A*** le long d'un contour fermé infinitésimale qui entoure un point *P* :

d) on considère un champ électrique ***E*** et un contour quelconque *C*
e) on calcule Γ***(A)*** le long de *C*
f) on réduit progressivement la taille de *C* et on calcule Γ*(A)* à chaque étape
→ **impossible de trouver une limite à ce calcul !**

* On recommence l'opération en calculant cette fois-ci : $\frac{\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}}{S}$,

*S* étant la surface engendrée par le contour fermé *C* :

b) on réduit la dimension de *C,* donc de *S*, tout en calculant Γ***(A)/S***

→ on obtient une limite à cette valeur dès que le champ électrique peut être considéré comme homogène sur la surface *S* réduite.

On définit alors l'opérateur **rotationnel** comme la limite de ce rapport :

$$\boxed{|\,rot\vec{A}\,| = \lim_{S\to 0} \frac{\iint_C \vec{A}.d\vec{\ell}}{S}}$$

On sait que cette quantité existe et qu'elle est parfaitement définie.

Remarque :
L'opérateur rotationnel transforme : un v**ecteur** → un **autre vecteur**

***RotA*** est donc un vecteur dont la norme est donnée par la relation précédente et sa direction par celle du vecteur ***S.***

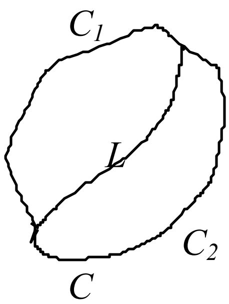
Mais comment l'utiliser pour exprimer la circulation de ***B*** localement ?

## 1.6. Théorème de Stokes

1- on considère : un contour fermé $C$ + un champ de vecteur $\boldsymbol{A}$

$\rightarrow$ on sait calculer $\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}$

2 - on divise le contour $C$ en deux contours $C_1$ et $C_2$ :




$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_{C1} + \Gamma_L \\ \Gamma_2 &= \Gamma_{C2} + \Gamma_L' \end{aligned}\right| \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_{C1} + \Gamma_{C2} = \Gamma_C$$

3 – si on divise en $n$ contours : $\rightarrow$ $\Gamma(\vec{A}) = \sum_n \Gamma_n(\vec{A})$

4 – on peut aussi écrire : $\Gamma(\vec{A}) = \sum_n \oint_C \vec{A}.d\vec{\ell} = \sum_n S_n \dfrac{\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell}}{S_n}$

4 – si on fait tendre $n \rightarrow \infty$ , $S_n \rightarrow dS$, le $\sum$ devient $\iint$ :

$$\boxed{\oint_C \vec{A}.d\vec{\ell} = \iint_S r\vec{o}t\vec{A}.d\vec{S}}$$

- **REMARQUES :**

Une surface fermée $S$ définit un volume $V$

Th. d'Ostrogradsky relie $S$ et $V$ $\rightarrow$ $\int_s \vec{\boldsymbol{A}} \,.\, \vec{\boldsymbol{dS}} = \int_v div\, \vec{\boldsymbol{A}} \,.\, dV$

Un contour fermé $C$ définit une surface $S$

le th. de STOKES relie $C$ et $S$ $\rightarrow$ $\int_C \vec{\boldsymbol{A}} \,.\, \vec{\boldsymbol{dl}} = \int_S \boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{A}} \,.\, \vec{\boldsymbol{dS}}$

Deux points $A$ et $B$ limitent une trajectoire $C$

le gradient relie $A,B$ et $C$. $\rightarrow$ $V_A - V_B = \int_C \boldsymbol{grad}\vec{\boldsymbol{A}} \,.\, \vec{\boldsymbol{dl}}$

Les opérateurs sont en fait des équations différentielles. Leur résolution consiste en des intégrations qui font apparaître des constantes d'intégration. Il est donc indispensable de connaître les conditions aux limites du champ étudié.

- **EXEMPLES**

**1** - Calculez le rotationnel et la divergence du vecteur suivants.

$F_x = x + y$ $\quad F_y = -x + y$ $\quad F_z = -2\,z$

**2** - En coordonnées cartésiennes établir les relations suivantes:

**a) rotgrad** $f = 0$

**b)** div**rot** $\boldsymbol{a} = 0$

## 1.7. Equation locales du champ électriques

- **Forme locale du Théorème de Gauss**

Th. de Gauss : $\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}.\iiint_V \rho.dV$

+ Ostrogradsky : $\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iiint_V div\vec{E}.dV$

$\Rightarrow$ $\boxed{div\vec{E} = \rho / \varepsilon_o}$ 1ère équation locale du champ électrique

- **Forme locale de la circulation du champ électrique**

Circulation de E $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$ $\Rightarrow$ $r\vec{o}t\vec{E} = r\vec{o}t(-\overrightarrow{gradV}) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{r\vec{o}t\vec{E} = 0}$ 2ème équation locale du champ électrique

## 1.8. Equations locales du champ magnétique

- **Forme locale du Théorème d'Ampère**

Th. d'Ampère: $\oint_C \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0.\iint_S \vec{J}.d\vec{S}$

+ Ostrogradsky : $\oint_C \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_S r\vec{o}t\vec{B}.d\vec{S}$

$\Rightarrow$ $\boxed{r\vec{o}tB = \mu_0 \vec{J}}$ 1ère équation locale du champ magnétique

- **Forme locale de la conservation du flux :**

si $d\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot d\vec{\ell} \wedge \dfrac{\vec{r}}{r^3}$

le calcul de div($\vec{B}$) se ramène à :

$$\mathbf{div}(\mathbf{d}\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^3}) = \mathbf{d}\vec{\ell} \cdot \mathbf{rot}(\frac{\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^3}) - \frac{\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^3} \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{d}\vec{\ell})$$

$\dfrac{\vec{r}}{r^3} = gr\vec{a}d(\dfrac{1}{r})$
et rot(grad) = 0

= 0 car
dl indèp. de M

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{div}(\vec{B}) = 0}$

→ REMARQUE : Ostrogradski : $\iiint_V \mathbf{div}\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}\tau = \oiint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$

On retrouve les résultats relatifs au flux de ***B***

## 1.9. Potentiel vecteur du champ magnétique

- on sait que : div$\boldsymbol{B}$ = 0

  et que : div$\boldsymbol{rot\ u}$ = 0 $\quad \Rightarrow \quad \exists$ un vecteur $\boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{rot\ A}$

$$\boxed{\boldsymbol{A} \text{ est le potentiel vecteur de } \boldsymbol{B}}$$

REM : $\quad \boldsymbol{rot\ (grad\ u)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}$ est défini à un gradient près :

$$\Rightarrow \quad \vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi$$

champ scalaire

- on a vu que : $\quad \mathbf{d\vec{A}} = \dfrac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi \mathbf{r}} \cdot \mathbf{d}\vec{\ell} \quad$ **c'est – à – dire** $\quad \vec{\mathbf{A}} = \dfrac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \oint \dfrac{\mathbf{d}\vec{\ell}}{\mathbf{r}}$

Exercice :

## 1.10. Opérateur Laplacien - Equation de Poisson

On introduit un nouvel opérateur $\quad \rightarrow div\, gr\vec{a}d V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$

Le Laplacien associe : un scalaire à un scalaire
ou un vecteur à un vecteur ($div\ \boldsymbol{grad}\ A_x$)

Cet opérateur permet d'écrire une équation fondamentale : $\boxed{\Delta V = -\rho/\varepsilon_0}$

**équation de Poisson**

En absence de charges cette équation devient **:** $\boxed{\Delta V = 0}$

**équation de Laplace**

## 1.11. RESUME

| | Electrostatique | magnétostatique |
|---|---|---|
| source de champ | charges fixes | chagres en mouvement |
| action d'une source élémentaire | $d\vec{E} = \frac{1}{4\mu\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}.\vec{u}$ | $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}.\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$ |
| circulation | conservative<br>$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\ell} = \mathbf{0}$ | non conservative<br>$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}\vec{\ell} = \mu_0 \mathbf{I}$<br>(Ampère) |
| flux | non conservatif<br>$\oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{q}_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$<br>(Gauss) | conservatif<br>$\oiint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ |
| équations locales | rot$\boldsymbol{E} = 0$<br>div$\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ | rot$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}$<br>div$\boldsymbol{B} = 0$ |
| lignes de champ | - non fermées<br>- peuvent diverger | - fermées<br>- ne peuvent diverger |
| potentiel | scalaire<br>$\boldsymbol{E} = -\,\mathbf{grad}\,V$ | vecteur<br>$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ |

# 2. Energie et densité d'énergie

## 2.1. Energie électrique

- **charge *q* dans un potentiel *V* :**

  $Up = q.V$

- **distribution de *N* charges**

$N$ charges $q_i$ dans le potentiel des *N-1* autres charges:

$$\boxed{U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i}$$

- **distribution volumique de charge ρ :**

$$\boxed{U_p = \frac{1}{2}\iiint_D \rho(r).V(r).d\tau}$$ (D est le volume contenant des charges)

**Exemple 1**: sphère chargée en surface.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{et} \quad U_p = \frac{1}{2}V\iiint_S \rho(R).d\tau = \frac{1}{2}VQ = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

- **dipôle dans un champ extérieur**

$U_p = qV(P) - qV(N)$ V est un potentiel extérieur

$$Or \quad P \approx N \quad \Rightarrow \quad V(P) - V(N) \approx \overrightarrow{grad}(V).\overrightarrow{PN} = -\vec{E}.\overrightarrow{NP}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_p = -\vec{p}.\vec{E}}$$

**REM** : on retrouve la force qui agit sur le dipôle :

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}(-\vec{p}.\vec{E}) = (\vec{p}.\overrightarrow{grad}).\vec{E}$$

## 2.2. Energie magnétique

- **Circuit filiforme dans un champ extérieur**

Energie pot. du circuit dans un champ magnétique extérieur : $U_I = - I\Phi$

$\Phi$ est le flux du champ ext. à travers le circuit

Energie emmagasinée par le circuit : $U_I = \frac{1}{2} L I^2$

- **Distribution volumique de courant :**

$$W = \tfrac{1}{2} \iiint_V \vec{J}.\vec{A}.d\tau$$

- **Dipôle magnétique dans un champ extérieur**

dipôle magnétique $\rightarrow$ $\boldsymbol{\mathcal{M}} = \boldsymbol{S}.I$

flux à travers le dipôle $\rightarrow$ $\Phi = \mathbf{B.S}$

$\Rightarrow$ $U_I = - \Phi.I$ $\Rightarrow$ $\boxed{\phi = \vec{\mathfrak{M}}.\vec{B}}$

Reste valable pour une distribution de courant pour laquelle on a :

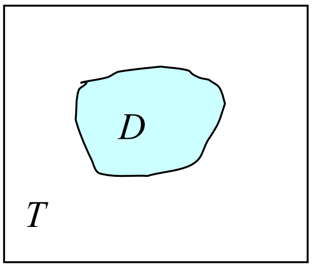
$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \wedge \vec{J}.dV$$

## 2.3. Aspect local de l'énergie : densité d'énergie

- **Densité d'énergie électrique**

On a vu : $U_p = \frac{1}{2}\iiint_D \rho(r).V(r).d\tau$

Et la relation : $divE = \rho/\varepsilon_0$ est valable en tout point




$\Rightarrow \qquad U_p = \frac{1}{2}\iiint_T \varepsilon_0 div\vec{E}.V.d\tau$

or $\qquad div(V.\vec{E}) = V.div\vec{E} + \overrightarrow{grad}V.\vec{E}$

$\Rightarrow \qquad V.div = \vec{E}div(V.\vec{E}) + \vec{E}^2$

$\Rightarrow \qquad U_p = \frac{1}{2}\iiint_T \varepsilon_0 div(V.\vec{E}).d\tau + \frac{1}{2}\iiint_T \varepsilon_0 E^2.d\tau$

$\Rightarrow \qquad U_p = \frac{1}{2}\oiint_S \varepsilon_0 V\vec{E}.d\vec{S} + \frac{1}{2}\iiint_T \varepsilon_0 E^2.d\tau$

Le premier terme tend vers 0 quand S augmente

$\Rightarrow \qquad U_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_T E^2.d\tau$

$\Rightarrow \qquad \boxed{\omega = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ $\qquad \omega$ est la densité d'énergie

**Exemple** : Retrouver l'énergie d'un condensateur consistué de 2 disques conducteurs de surface *S* et séparés par le vide d'une distance *d*.

- **Densité d'énergie magnétique**

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{A}.rot\vec{B}.d\tau \qquad \text{et} \quad div(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}.rot\vec{a} - \vec{a}.rot\vec{b}$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint (\vec{B}.rot\vec{A} - div(\vec{A}\wedge\vec{B})).d\tau$$

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2.d\tau - \frac{1}{2\mu_0}\iint \underline{\vec{A}\wedge\vec{B}.d\vec{S}}$$

tend vers *0* qd le volume grandit

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2.d\tau$$

Ceci nous amène à définir une **densité d'énergie magnétique** : $\frac{dW}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$

**Exemple :**

bobine toroïdale $\quad L = \frac{\mu_0}{2\pi}N^2 h \ln(\frac{a}{b})$

- A l'intérieur de la bobine le champ magnétique vaut : $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$
- A l'extérieur --------------------------------------------- : $B = 0$

- Le calcul de l'énergie associée à ce champ magnétique est :

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2.d\tau = \frac{\mu_0}{8\pi^2}N^2 I^2 \int_a^b \frac{2\pi r h}{r^2}dr = \frac{\mu_0}{4\pi}N^2 h I^2 \ln(\frac{a}{b})$$

En comparant avec l'expression du coefficient d'auto-induction on trouve :

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{2\mu_0}\iiint B^2.d\tau = \frac{1}{2}LI^2$$

# 3. Equations de Maxwell

## 3.1. Rappels

On a vu :
- les équations de l'électrostatique
- les équations de la magnétostatique
- quelques cas de régimes variables : phénomènes d'induction

On veut maintenant généraliser toutes ces équations aux problèmes dépendant du temps

- **Electrostatique**

• relation entre champ et source (charges) :

$$\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\left(\text{en intégrant sur un volume: } \iiint_V \mathrm{div}\vec{E}.d\tau = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho.dt\right)$$

**Théorème de Gauss**

• propriété du champ :

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

$$\left(\text{en intégrant sur une surface: } \iint_S \mathrm{rot}\vec{E} = \oint_C \vec{E}.d\vec{\ell} = 0\right)$$

• autre expression du champ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \quad \rightarrow \quad \mathrm{div}\vec{E} = -\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}V \quad \Rightarrow \quad \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

**Equation de Poisson**

• solutions de ces équations :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho.d\tau}{r} \quad et \quad \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi.\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho.d\tau}{r^2}.\vec{u}$$

dans lesquelles :

- $r$ est la distance du point $M$ à l'élément de source $\rho\, d\tau$.
- le volume d'intégration est le volume où $\rho \neq 0$

- **Magnétostatique**

- relation entre champ et source (courants) :

$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\left(\text{en intégrant sur une surface} : \iint_S \mathrm{rot}\vec{B}.d\vec{S} = \oint_C \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{J}.d\vec{S} = \mu_0 I\right)$$

**Théorème d'Ampère**

- propriété du champ :

$\mathrm{div}\vec{B} = 0$

$$\left(\text{en intégrant sur un volume} : \iiint_V \mathrm{div}\vec{B}.d\tau = \oiint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0\right)$$

**Flux conservatif**

- autre expression du champ :

pas de restriction sur $A$
$\Rightarrow divA = 0$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{rotA} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{rotB} = \boldsymbol{rotrotA} = \boldsymbol{grad} div\boldsymbol{A} - \Delta\mathbf{A} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

$$\underline{\Delta \boldsymbol{A} + \mu_0 \boldsymbol{J} = 0}$$

- solutions de ces équations :

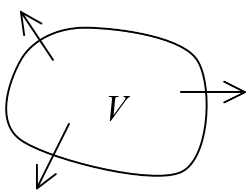
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}.d\tau}{r} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}}{r^2}.d\tau$$

dans lesquelles : - $r$ est la distance du point $M$ à l'élément de source $\boldsymbol{J}.\ d\tau$.
- le volume d'intégration est le volume où $\boldsymbol{J} \neq 0$

- **cas des régimes variables**

- Equation de continuité : traduit la conservation d'énergie.

- soit une charge $Q$ contenue
- dans un volume $V$ délimité
- par une surface $S$ : $\rightarrow$ $Q = \iiint_V \rho.d\tau$




- s'il y a variation de la charge en fonction du temps on écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}.d\tau \ et \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = -\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = \iiint_V div\vec{J}.d\tau \quad \Rightarrow \quad div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

**équation de continuité**

***REM : une charge en mvt est un courant. Comme la charge n'est ni créée ni détruite, les densités de charges et de courants satisfont toujours cette relation.***

• Induction magnétique

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ou encore :

$$\iint \mathrm{rot}\vec{E}.d\vec{S} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d\vec{S}$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Variation de champ électrique = champ magnétique.

## 3.2. Courant de déplacement

- **« Il manque quelque chose »**

• relation d'Ampère : $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \quad \Rightarrow \quad div\boldsymbol{J} = 0$

relation de continuité $div\boldsymbol{J} + \text{---} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\boldsymbol{J} \neq 0$

→ il y a incompatibilité entre les deux relations,
a priori, il faut modifier les deux équations

• On va plutôt postuler que seule la première doit être modifiée et l'on conserve l'équation qui traduit le théorème de Gauss :

$$\text{---}\ (div\boldsymbol{E}) = \text{——} \quad \text{———} = - \text{——} div\boldsymbol{J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{div(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \text{---}) = 0}$$

$\boldsymbol{J}$ est le vecteur densité de **courant de conduction**

$\varepsilon_0$—— est le vecteur densité de **courant de déplacement**

Et le théorème d'Ampère devient le **théorème de Maxwell - Ampère** :

$$\boxed{\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \text{——}}$$

- **Justification du postulat**

• Considérons le condensateur ci-contre et la relation de Stokes :

Pour la surface $S$ : la circulation de $\boldsymbol{B} = \mu_0 I$
Pour la surface $S'$ : la circulation de $\boldsymbol{B} = 0$

Donc, sur $S'$, $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B}$ doit dépendre d'autre chose $\Rightarrow$ $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + (?)$

• Une autre ligne de pensée suggère la réponse :

phénomène d'induction : variation de $\boldsymbol{B} \longrightarrow$ champ électrique $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{E} = -$ ———

l'inverse est possible : variation de $\boldsymbol{E} \longrightarrow$ champ électrique $\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0$ ——

## 3.3. Equations de Maxwell dans le vide

(1864)

$$\boldsymbol{rot}\ \mathbf{E} = -\ \text{———}$$

$$\boldsymbol{rot}\ \mathbf{B} = \mu_0\,(\mathbf{J} + \varepsilon_0\ \text{———})$$

$$div\ \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0$$

$$div\ \mathbf{B} = 0$$

• On appelle *vide* un milieu ayant les propriétés électriques du vide c'est-à-dire une permittivité $\varepsilon_0$ et une perméabilité magnétique $\mu_0$ . Le vide peut contenir des charges électriques de densité volumique $\rho$ et des courants de densité ***J***.

• La première équation est la *loi de l'induction* de Faraday.

• La deuxième exprime la dépendance du champ magnétique par rapport à la densité des courants de déplacement (i.e. au taux de variation du champ électrique) et à la densité des courants de déplacement (i.e. au taux de mouvement des charges).

• La troisième est équivalente à la loi de Coulomb. Elle fût, au départ, admise et il fallut attendre l'expérience (Hertz) pour confirmer sa validité.

• La quatrième énonce que seuls les courants sont sources de champ magnétique.

• Ce système d'équation est un système couplé. Les champs ***E*** et ***B*** sont indissociables puisqu'ils apparaissent à deux reprises dans la même équation. On doit donc définir un nouveau type de champ → **le champ électromagnétique**

• En régime non variable ⟶ 2 groupes d'équations → ***E***, $\varepsilon_0$ ; → ***B***, $\mu_0$

• Principale conséquence ⟶ définition et propagation des **ondes électromagnétiques**

## 3.4. Equations de Maxwell dans les milieux matériels

• dans le vide :les équations de Maxwell expriment les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ en fonction des sources $\rho$ et $\boldsymbol{J}$ à l'aide des coefficients $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ .

• dans les milieux matériels : les sources $\rho$ et $\boldsymbol{J}$ ont une influence sur le milieu et il apparaît de nouvelles sources. Deux façons de résoudre le problème :

a) soit on connaît bien le milieu (microscopiquement), on remplace :

$$\rho \longrightarrow \rho'_{(lib.)} + \rho''_{(liées)}$$
$$\boldsymbol{J} \longrightarrow \boldsymbol{J}'_{(lib.)} + \boldsymbol{J}''_{(liés)}$$

b) soit on introduit de nouveau vecteurs :

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{D} = f(\boldsymbol{E}) = [\varepsilon]\boldsymbol{E}$$

matrices

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{H} = g(\boldsymbol{B}) = [\mu]^{-1}\boldsymbol{B}$$

• cas des milieux linéaires, homogène, isotropes.

| | |
|---|---|
| - linéaire | fonctions $f$ et $g$ linéaires |
| - homogène | pas de région privilégiée |
| - isotropes | pas de direction privilégiée |

Alors les matrices sont ramenées à des scalaires :

permittivité électrique absolue

$$\boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{D} = f(\boldsymbol{E}) = \varepsilon\,\boldsymbol{E}$$

perméabilité magnétique absolue

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \boldsymbol{H} = f(\boldsymbol{B}) = 1/\mu\,\boldsymbol{B}$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{rot}\,\boldsymbol{E} = - \text{———} & div\,\boldsymbol{D} = \rho \\ \textbf{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \text{———} & div\,\boldsymbol{B} = 0 \end{array}}$$

En pratique on introduit les quantités : permittivité relative : $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$
perméabilité relative : $\mu_r = \mu / \mu_0$

## 3.5. Conditions aux limites entre deux milieux

- **Discontinuité de *E* et *B* en présence de ρ et de J**

On va voir comment se comportent les composantes du champ électromagnétique en considérant les deux figures ci-dessous :

→ Composantes normales du champ électromagnétique

• pour le champ ***B*** :

• pour le champ ***E*** :

→ Composantes tangentielles du champ électromagnétique

• pour le champ ***E*** :

• pour le champ ***B*** :

# 4. Travaux dirigés

## 4.1. Opérateurs et équations locales

**1. Entraînement** : En intégrant les équations locales, soit sur un volume soit sur une surface, retrouver les 2 propriétés des champs électriques et magnétiques.

**2.** Calculez le rotationnel et la divergence de chacun des champs de vecteurs suivants. Si le rotationnel est nul, essayez de trouver une fonction scalaire $V$ dont le champ de vecteur soit le gradient :

a) $G_x = 2y$ $\quad G_y = 2x + 3z$ $\quad G_z = 3y$

b) $H_x = x^2 + y^2$ $\quad H_y = 2$ $\quad H_z = 2xy$

**3.** En utilisant les coordonnées cartésiennes, établir les relations suivantes :

1) div $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}.\text{rot}\, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}.\textbf{rot}\, \boldsymbol{b}$ (on rappelled : $\frac{\partial uv}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$)

2) $\textbf{rotrot}\, \boldsymbol{a} = \textbf{grad}\text{div}\, \boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$ (faire le calcul pour 1 composante)

3) div $(f\,\boldsymbol{a}) = f\,\text{div}\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}.\textbf{gad}\, f$

4) $\textbf{rot}\,(f\boldsymbol{a}) = f\,\textbf{rot}\, \boldsymbol{a} + \textbf{grad}\, f \wedge \boldsymbol{a}$ (faire le calcul pour 1 composante)

**4. Champ d'une sphère uniformément chargée en volume.** Une sphère de rayon $R$ porte une charge $Q$ uniformément répartie dans son volume. On admettra (mais on peut le montrer) que le champ est radial ($\vec{E} = E.\vec{e}_r$).

a) Ecrire les équations locales auxquelles satisfait le champ $E$.

b) Achever la détermination de E en utilisant la continuité de $E$ en $r = R$ (pas de charge en surface) et la limite de $E$ à l'infini.

**5. Champ d'une nappe volumique de courant**. On considère une densité uniforme de courant $\vec{j} = j\vec{e}_x$ répartie entre deux plans z = -a et z = a. Il n'y a pas de courant pour |z| > a. On admettra que, par raison de symétrie, le champ magnétique est de la forme : $\vec{B} = B\vec{e}_y$ et que B(-z) = -B(z). En utilisant les équations de Maxwell, exprimer B dans tout l'espace.

## 4.2. Energie

**1. Energie électrique.** Calculer l'énergie électrostatique d'une boule de rayon R portant une charge totale Q répartie dans tout son volume à partir de l'expression de la densité d'énergie électrique. Retrouver ce résultat en calculant le travail fourni par un utilisateur pour construire cette boule.

**2. Câble coaxial.** On peut admettre que l'expression de l'inductance propre d'un câble coaxial de longueur *h* de rayon d'âme *a* et de rayon de gaine *b* est :

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} . \ln \frac{b}{a}$$

Ce résultat s'obtient en négligeant, dans le calcul des flux, les régions conductrices (âme et gaine) devant la région isolante. Retrouvez ce résultat, avec les mêmes approximations, en utilisant la densité d'énergie électromagnétique.

**3. Solénoïde.** Vérifiez que l'énergie d'un solénoïde fini de longueur $\ell$, d'inductance $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$ a une densité $B^2/2\mu_0$. On admettra que $B=\mu_0 NI/\ell$ en tout point intérieur au solénoïde.

## 4.3. Equatins de Maxwell

**1. Charge en mouvement et courant de déplacement.**

Une petite sphère de matière radioactive, de rayon *R*, est placée à l'origine des coordonnées. Du fait de sa radioactivité, cette sphère émet des charges et on admettra que cette émission est isotrope. Ainsi, la charge à l'intérieur d'une sphère de rayon $r > R$ à l'instant *t* est-elle une fonction de *r* et de *t* : $Q = Q(r, t)$.

a) En utilisant la symétrie du problème, indiquez les directions de $\boldsymbol{E}$ et de $\boldsymbol{B}$ en un point *M* extérieur à la sphère radioactive. Que doit on en conclure pour le champ magnétique ? Ce résultat est-il compatible avec la présence de courants dus à des charges en mouvement ?

b) Calculez le champ électrique $\boldsymbol{E}(M, t)$ pour $r > R$ en fonction de $Q(r, t)$.

c) Calculez le vecteur densité de courant $\boldsymbol{J}$ lié au mouvement des charges, et le courant de déplacement $\varepsilon_0\, \partial \boldsymbol{E}/\partial t$ . L'ensemble est-il en accord avec le résultat obtenu au a).

**2. Courant de déplacement et courant de conduction**

On considère un milieu de conductivité $\sigma$ pour lequel le courant de conduction $\boldsymbol{J}$ est lié à $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$. On suppose que $\sigma$ a la même valeur en régime alternatif qu'en régime permanent et que le milieu considéré a les mêmes constantes $\mu_0$ et $\varepsilon_0$ que le vide.

Pour un champ alternatif $\boldsymbol{E}$ de pulsation $\omega$ , calculez le rapport $\alpha$ des amplitudes du courant de conduction et du courant de déplacement. Pour $\omega = 2.\Pi.10^6$ rd/s chiffrez ce rapport ($\varepsilon_0$ = 8,8 $10^{-12}$ S.I.) dans les différents cas suivants :

a) Pour le cuivre ($\sigma = 6.10^7$ S.I.)
b) Pour un sol argileux ($\sigma = 10^{-4}$ S.I.)
c) Pour du verre ($\sigma = 10^{-6}$ S.I.)

Donnez les unités de $\sigma$ et de $\varepsilon_0$.

**3. Equations de maxwell**

Vérifiez que le champ électromagnétique suivant vérifie les équations de Maxwell dans le vide privé de charge et de courant (avec $c^2=1/\mu_0.\varepsilon_0$) :

$$E_x = E_y = 0 \; ; \; E_z = c \cos(y - ct) \qquad et \qquad B_x = \cos(y - ct) \; ; \quad B_y = B_z = O$$

## 4.4. Ondes électromagnétiques

**1. (Cours)** Etablir les équations d'onde satisfaites par les 2 champs E et B à partir des équations de Maxwell.

**2. (Cours)** Ecrire l'expression générale d'une solution de l'équation d'onde correspondant à une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{n}$ de composantes $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

**3. Onde stationnaire** : On cherche une solution de l'équation d'onde de la forme :
$F(x,t) = f(x) \cos \omega t$
Montrer que $f(x)$ obéit à une équation différentielle et donner la forme de sa solution.
Avec les conditions aux limites $F(0,t) = 0$ et $F(a, t) = 0$ montrer que la solution fait intervenir un entier $n$ ($F$ décrit une onde stationnaire).

**4. Onde progressive non plane.** On s'intéresse à une solution de l'équation d'onde de la forme :

$$F = A\cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right)\cos(kx - \omega t)$$ où $A$, $a$, $k$ et $\omega$ sont des constantes.

Montrer qu'il existe une relation entre $k$, $c$, $a$ et $\omega$ et que ce type de solution ne convient que si $\omega > \omega_0$. Déterminer $\omega_0$.

**5. Superposition d'ondes progressives.** Soit l'onde plane progressive suivante :
$F_1 = A \cos((kx-\omega t)$.

a) Ecrire l'expression $F_2$ correspondant à une onde de même amplitude $A$, de même fréquence $\omega$ et se propageant en sens inverse.

c) Montrer que la superposition de ces 2 ondes aboutit à une onde du type de l'exemple du cours (ondes stationnaire).

**6. Potentiels de l'onde plane progressive** . On se propose de déterminer les potentiels de l'onde progressive plane électromagnétique dans le vide en l'absence de charges et de courants. On adoptera la jauge de Lorentz (.
Ecrire l'équation de d'Alembert concernant le potentiel vecteur en prenant l'axe $Ox$ comme direction de propagation. Proposer une forme de solution.
On adopte la jauge de Lorentz : déterminer le potentiel scalaire $V$ à partir de $\boldsymbol{A}$.
Montrer que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont transverses

**7. Onde plane monochromatique associée à un faisceau laser**. Un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda$ émet une OPM polarisée rectilignement qui se propage dans une direction *Ox'* contenue dans le plan *Oxy* et faisant un angle de 60° avec l'axe *Ox*.Le faisceau est polarisé rectilignement suivant *Oz*.
Ecrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Pointing.
Calculer leur norme dans le cas d'un laser à Argon ($\lambda$ = 488nm) qui émet en continu un faisceau cylindrique de section 1 mm² et de puissance moyenne 1W.

**8. Onde sphérique :** Une onde est *sphérique* si les composantes des champs et des potentiels en un point *P* ne dépendent que de la distance *r* du point *P* à la source placée en *O* (cas des sources ponctuelles). En tout point d'une sphère de centre *O* le champ a même norme à un instant donné. Si l'on désigne par $\Psi$ une composante du champ électromagnétique, $\Psi$ est solution de l'équation. Montrer que cette solution est de la forme :

$$\Psi = 1/r\,[f(t - r/c) + g(t + r/c)]$$

En coordonnées sphériques : $\Delta\Psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial^2 r}(r.\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2\varphi}$

**9. Polarisation**. Décrire l'état de polarisation des ondes représentées par les équations suivantes :

a) $E_y = A\cos[\omega(t - x/c)]$
$E_z = A\sin[\omega(t - x/c)]$

b) $E_y = A\cos[\omega(t - x/c)]$
$E_z = -A\cos[\omega(t - x/c)]$

c) $E_y = A\cos[\omega(t - x/c)]$
$E_z = A\cos[\omega(t - x/c)+\pi/4]$