

Electromagnétique 5

Ondes électromagnétiques

Table des matières

1. Equations de Maxwell – Equation d'onde	2
1.1 Eq. de Maxwell dans le vide en dehors des charges et courants	2
1.2 Equations de propagation	3
1.3 Les potentiels	4
1.4 Solutions de l'équation d'onde	5
1.5 Ondes planes et sphériques	6
1.6 Propriétés des ondes planes progressives (OPPEM)	8
2. Ondes planes monochromatiques	9
2.1 Définitions	9
2.2 Période et fréquence	10
2.3 Polarisation des ondes planes monochromatiques	13
2.4 Représentation complexe des ondes monochromatiques	17
3. Energie électromagnétique	20
3.1 Considération qualitative	20
3.2 Puissance cédée par un champ EM à des porteurs de charge	21
3.3 Identité de Poynting	22
3.4 Densité et flux d'énergie électromagnétique	23
3.5 Vecteur de poynting	24
3.6 Application aux OPPEM	25
4. Réflexion d'une onde plane sur un conducteur parfait Ondes stationnaires	27
4.1 Introduction qualitative – Rappels	27
4.2 Réflexion d'une OPPEM monochr. sur un conducteur parfait	28
4.3 Structure de l'onde stationnaire	29
4.4 Aspect énergétique	31
4.5 Notions de modes propres d'une cavité	32
5. Notion sur la propagation guidée	33
5.1 Préambule	33
5.2 Cas d'un guide rectangulaire	34
5.3 Modes de propagation	36
5.4 Mode TE du guide d'onde rectangulaire	37
6. Lignes de transmission	40
6.1 Modélisation électrique	40
6.2 Equations des télégraphistes	41
6.3 Impédance caractéristique	43
6.4 Coefficients de réflexion : définition	45
6.5 Adaptation d'impédance	46
7. ANNEXE1	48
8. Onde dans un guide d'onde : cas général	49

1. Equations de Maxwell – Equation d'onde

1.1 Eq. de Maxwell dans le vide en dehors des charges et courants

Les équations de Maxwell dans le vide :

$$\left| \begin{array}{ll} \text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0 & \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

En dehors des charges et des courants : $\rho = 0$ et $\vec{J} = 0$

$$\left| \begin{array}{ll} \text{div} \vec{E} = 0 & \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{B} = 0 & \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Les sources du champ E.M. n'apparaissent pas dans les équations de Maxwell.

1.2 Equations de propagation

• Champ électrique : $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad | \Rightarrow \quad \Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$

• Champ magnétique : $rot\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad | \Rightarrow \quad \Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0$

• Les Potentiels :

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad et \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0}$$

(jauge de Lorentz)

Les 2 champs et les potentiels obéissent donc à une équation de la forme :

$$\boxed{\Delta\vec{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} = 0}$$

Il s'agit de l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert : \vec{F})

Exprime une relation entre variation spatiale et temporelle de la variable

La fonction \vec{F} est une onde qui se propage à la vitesse c .

Les 2 équations en \vec{E} et \vec{B} montrent donc que le champ électromagnétique se manifeste sous la forme d'une onde qui se propage dans le vide à la vitesse :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} (= 299\,792\,458 \text{ m/s})}$$

Cette équation possède une infinité de solutions \rightarrow conditions aux limites

1.3 Les potentiels

- potentiel scalaire:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \text{div} \vec{E} &= -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = 0}$$

sachant que : $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}V) = \Delta V$

- potentiel vecteur

$$\vec{B} = r\vec{\text{ot}}\vec{A} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \vec{B} = r\vec{\text{ot}}(r\vec{\text{ot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

or $r\vec{\text{ot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)}$$

V défini à une Cste près

A défini à un gradient près: \Rightarrow il existe une infinité de couple (V, A) solution
Ceci autorise une condition supplémentaire sur les potentiels \rightarrow **choix de jauge**

jauge de Lorentz : on impose : $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

on obtient : $\boxed{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0}$

Les potentiels obéissent à la même équation d'onde que les champs

- Cette équation possède une infinité de solutions \rightarrow conditions aux limites
 \rightarrow symétrie du problème

1.4 Solutions de l'équation d'onde

→ **Solution** : On montre que la solution d'une telle équation s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{f}(t - r/c) + \vec{g}(t + r/c)$$

ou $\vec{F} = \vec{f}(r - ct) + \vec{g}(r + ct)$ avec $\mathbf{r}(x, y, z)$

→ **Signification** : 2 couples (r_1, t_1) et (r_2, t_2) donneront la même solution ssi :

$$\begin{aligned} r_1 - ct_1 = r_2 - ct_2 &\Rightarrow c = \pm \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1} \\ r_1 + ct_1 = r_2 + ct_2 & \end{aligned}$$

- Il y a donc propagation d'un phénomène à la vitesse c
- f et g sont des ondes *progressives* se propageant en sens inverses :

f : l'onde s'éloigne de la source (vers les r croissants)

g : l'onde se rapproche de la source (vers les r décroissants)

Dans le cas général, \vec{F} est la somme de 2 ondes se propageant en sens inverses.

→ **Remarques** : opposition : onde progressive – onde stationnaire

Les ondes progressives sont décrites par des fonctions du type :

$$f_p(t, M) = A(M) \cdot f(t, r(M))$$

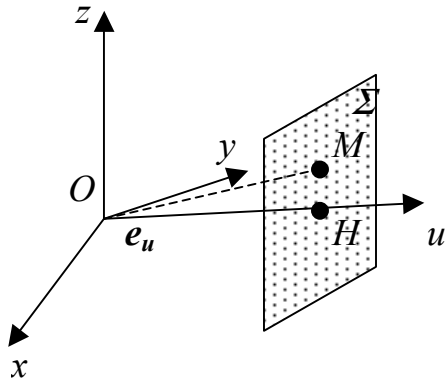
Les ondes stationnaires sont décrites par des fonctions du type :

$$f_p = A(M) \cdot f(t)$$

Les fonctions d'espace et de temps sont dissociées

1.5 Ondes planes et sphériques

1.5.1 L'onde plane



Soit 1 direction Ou quelconque définie par :

$$\vec{e}_u = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$$

Soit un point M repéré par :

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

Si H est la proj. de M suivant \vec{e}_u on note :

$$u = \overline{OH} = \vec{e}_u \cdot \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Lorsque le champ (\vec{E}, \vec{B}) ne dépend que de u l'onde est dite **plane**.

En effet, le champ (\vec{E}, \vec{B}) a la même valeur en tout point du plan Σ

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}(u, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}(M, t) = \vec{B}(u, t)$$

Σ , plan perpendiculaire à la direction Ou , est appelé **plan d'onde**

L'équation d'onde devient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{F}(u, t)}{\partial u^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0}$$

solution du type : $\vec{F} = \vec{f}(t - u/c) + \vec{g}(t + u/c)$

D'un point de vue pratique on essaie de faire coïncider la direction Ou avec un des axes du repère. Par exemple si $Ou \equiv Oz$ on obtient des solutions du type :

$$\vec{F} = \vec{f}(t - z/c) + \vec{g}(t + z/c)$$

et le plan d'onde est // au plan Oxy

Le concept d'"onde plane" est **simple** mais représente toujours une approximation car il n'est valable que dans un **espace limité**

1.5.2 L'onde sphérique

Concept plus réaliste → émission *EM* d'une source ponctuelle

Une onde est dite "sphérique" si les composantes du champ en tout point de l'espace ne dépendent que de la distance r de ce point à la source

L'équation d'onde s'écrit :
$$\Delta \vec{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0$$

En coordonnées sphériques :
$$\Delta \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \cdot \Psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \cdot \vec{F})}{\partial r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 (r \cdot \vec{F})}{\partial r^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r \cdot \vec{F})}{\partial t^2} = 0$$

⇒ solution de la forme :
$$r \vec{F} = \vec{f}(t - r/c) + \vec{g}(t + r/c)$$

⇒ et donc :
$$\vec{F} = \frac{1}{r} \vec{f}(t - r/c) + \frac{1}{r} \vec{g}(t + r/c)$$

C'est-à-dire la somme de 2 fonctions, une divergente et une convergente
L'onde sphérique se déforme puisqu'elle s'atténue avec r .

1.6 Propriétés des ondes planes progressives (OPPEM)

Considérons Oz comme direction de propagation

Considérons la solution correspondant à la progression vers les z croissants

Considérons le changement de variable suivant : $v = z - ct$

Soit $E(v)$ le module du champ $\vec{E}(v)$ et E_x , E_y et E_z ses composantes

$$\text{Remarquons que : } \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial v} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial E}{\partial v}$$

Idem pour le champ $\vec{B}(v)$

• Première propriété

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad E_z = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad B_z = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{E}$ et \mathbf{B} sont dans le plan \perp à la dir. de propagation \longrightarrow **Onde transverse**
(à opposer aux ondes longitudinales)

• Deuxième propriété

$$\text{On utilise la relation : } \boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\text{or } \text{rot.} \rightarrow \nabla \wedge . = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{e}_z \wedge .) = \frac{\partial}{\partial v} (\vec{e}_z \wedge .) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial v} (\vec{e}_z \wedge \vec{E}) = c \frac{\partial \vec{B}}{\partial v}$$

$$\text{(pas de cste d'intégration, } \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}}$$

une cste ne se propage pas)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{E} \quad (\vec{e}_z, \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ trièdre direct})$$

Dans le cas général, pour une propagation suivant un vecteur unitaire \vec{n} cette relation devient :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}}$$

et porte le nom de **relation de structure** de l'onde plane progressive

• Troisième propriété

$$\text{Le calcul précédent nous montre que : } |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$$\text{Remarquons que } |\vec{B}| \ll |\vec{E}|$$

2. Ondes planes monochromatiques

2.1 Définitions

Considérons uniquement la solution d'onde se propageant vers les r croissants.

Une onde plane monochromatique est telle que ses champs ont la forme :

$$\vec{F} = \vec{F}_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \varphi\right) \quad \text{ou} \quad \vec{F} = \vec{F}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) + \varphi$$

où \vec{F}_m : est l'**amplitude** du champ de coordonnées $F_x F_y F_z$

ω : est la **pulsation** (rds/s)

\vec{k} : est le **vecteur d'onde** de coordonnées : $k_x k_y k_z$;

notons : $\left| \vec{k} \right| = \frac{\omega}{c}$ (en m^{-1}) et $\vec{k} // \vec{r}$ (direction de propagation)

\vec{r} : donne la position du pt où est calculé le champ
et la direction de propagation (coordonnées x, y et z)

φ : est la **phase à l'origine** des temps et de l'espace

On appelle $\Phi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi$ la phase de l'onde en \vec{r} à l'instant t

2.1.1 Cas particulier :

si la propagation est suivant Oz le champ \vec{E} s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{E}(z, t) : \begin{cases} E_x = E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) \\ E_y = E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

2.1.2 Intérêt des ondes planes monochromatiques

L'onde plane progressive monochromatique n'a pas de sens physique réel.

Son intérêt vient du fait que la superposition de telles ondes correspond à des solutions réalistes.

2.2 Période et fréquence

2.2.1 Périodicité

Une telle onde fait apparaître une double périodicité :

1 – période temporelle : $T = \frac{2\pi}{\omega}$ **période**

évolution temporelle d'une grandeur en un point de l'espace

2 – période spatiale : $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ **longueur d'onde**

état de l'espace à un instant donné (photographie)

Lien entre les périodes : $\lambda = cT$

2.2.2 Fréquences

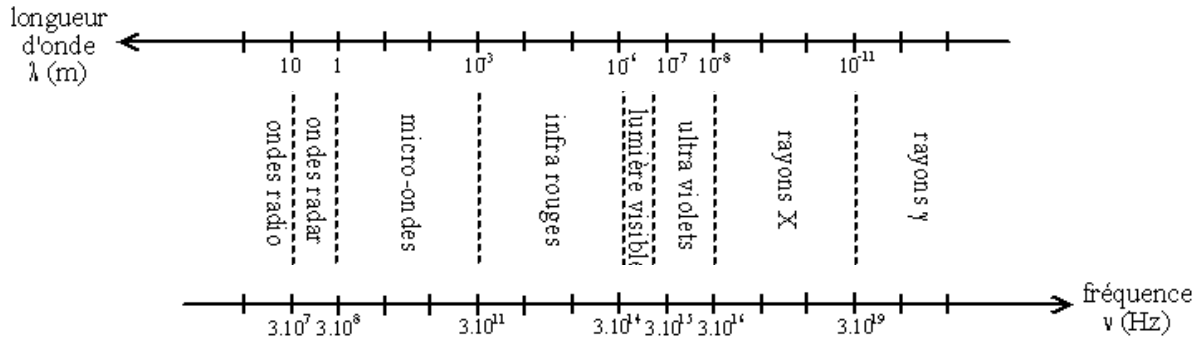
On peut définir des fréquences à partir des périodes

• fréquence temporelle : $f \text{ ou } \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

• fréquence spatiale ou nombre d'onde : $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}$

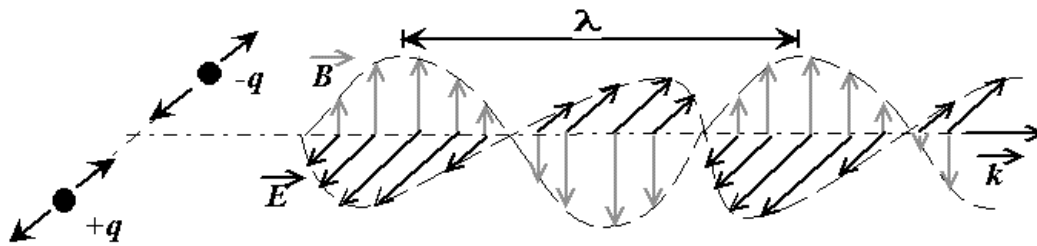
Ces fréquences permettent de classer les ondes électromagnétiques

2.2.3 Classification des ondes monochromatiques



Cas particulier des ondes hertziennes :

	NOM	f	λ	Franchissement d'obstacles	Pénétration d'obstacles	Pénétration dans l'eau	Réflexion en surface	Réflexion ionosph
VLF	VERY LOW FREQUENCIES	3 kHz 30 kHz	100 km 10 km	☺☺☺☺	-	☺☺☺☺	☺☺☺☺	☺☺
LF	LOW FREQUENCIES	30 kHz 300 kHz	10 km 1 km	☺☺☺	-	-	☺☺☺	☺☺
MF	MEDIUM FREQUENCIES	300 kHz 3000 kHz	1 km 100 m	☺☺	-	-	☺☺	☺
HF	HIGHT FREQUENCIES	3 MHz 30 MHz	100 m 10 m	☺	-	-	☺	☺
VHF	VERY HIGHT FREQUENCIES	30 MHz 300 MHz	10 m 1 m	-	☺	-	-	-
UHF	ULTRA HIGHT FREQUENCIES	300 MHz 3000 MHz	100 cm 10 cm	-	☺☺	-	-	-
SHF	SUPER HIGHT FREQUENCIES	3000 MHz 30 GHz	10 cm 1 cm	-	☺☺☺	-	-	-
EHF	EXTREMELY HIGHT HIGHT FREQ.	30 GHz 300 GHz	10 mm 1 mm	-	☺☺☺☺	-	-	-



2.2.4 Exemple : Onde plane monochromatique associée à un faisceau laser.

Un faisceau laser de longueur d'onde λ émet une OPM polarisée rectilignement qui se propage dans une direction Ox' contenue dans le plan Oxy et faisant un angle de 60° avec l'axe Ox . Le faisceau est polarisé rectilignement suivant Oz .

a) Ecrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Poynting.

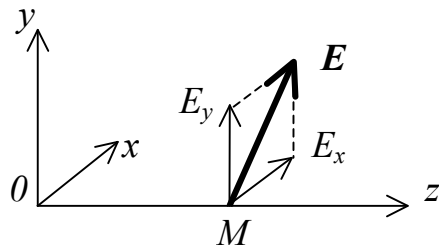
b) Calculer leur norme dans le cas d'un laser à Argon ($\lambda = 488\text{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de section 1 mm^2 et de puissance moyenne 1 W .

2.3 Polarisations des ondes planes monochromatiques

polarisation → problème de l'orientation des champs \mathbf{E} et \mathbf{B}

Considérons une onde plane monochromatique se propageant suivant Oz :

$$\vec{E}(z,t) : \begin{cases} E_x = E_{mx} \cos(\omega t - kz - \varphi_1) \\ E_y = E_{my} \cos(\omega t - kz - \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$



$$\text{et } \vec{B} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c} : \begin{cases} B_x = \frac{-E_{my}}{c} \cos(\omega t - kz - \varphi_1) \\ B_y = \frac{E_{mx}}{c} \cos(\omega t - kz - \varphi_2) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

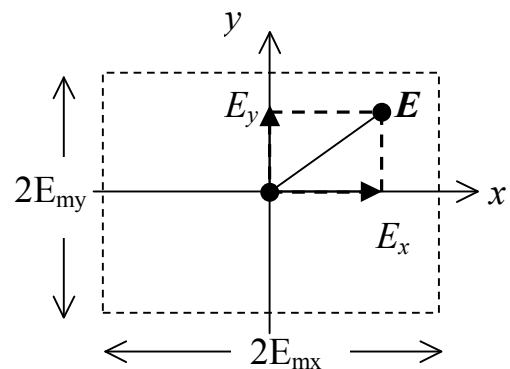
2.3.1 Différents états de polarisation dans le plan d'onde

Par commodité on se place dans le plan $z = 0$:

$$E_x = E_{mx} \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$E_y = E_{my} \cos(\omega t - \varphi_2)$$

Ds le plan Oxy , l'extrémité du champ \mathbf{E} décrit une courbe inscrite ds un rectangle de côtés $2E_{mx}$ et $2E_{my}$

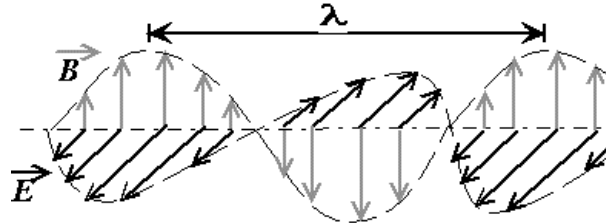
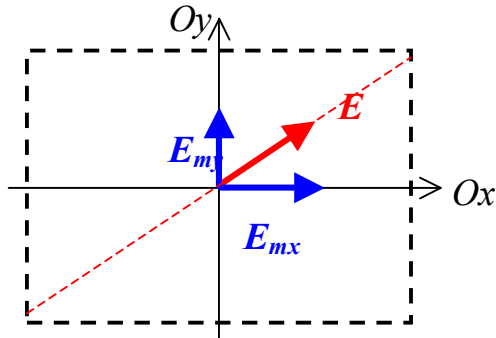


Différents cas se présentent :

a) 1^{er} cas : $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ou π

les composantes oscillent en phase $\Rightarrow \frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{mx}}{E_{my}}$

le champ garde une direction fixe \Rightarrow **polarisation rectiligne**



les deux composantes en phase

b) 2^{ème} cas : $\varphi_2 - \varphi_1 \neq n.\pi$

Posons $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, on peut écrire : $E_x = E_{mx} \cos(\omega t)$ $E_y = E_{my} \cos(\omega t - \varphi)$

$$\Rightarrow \frac{E_x}{E_{mx}} = \cos(\omega t) \quad \frac{E_y}{E_{my}} = \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

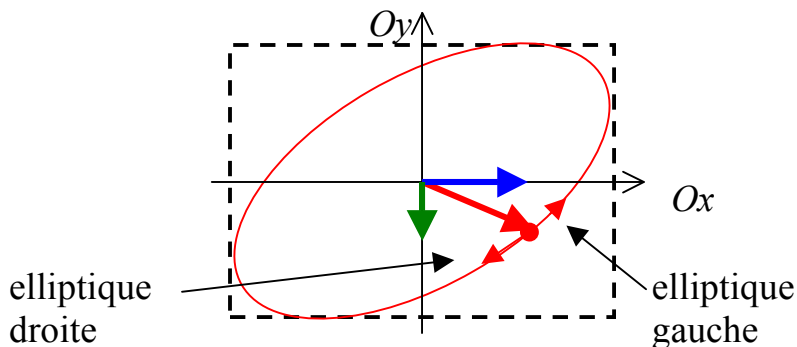
$$\Rightarrow \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_y}{E_{my}} - \frac{E_x}{E_{mx}} \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \cos(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_x}{E_{mx}} \sin(\varphi)$$

On élève au carré les 2 expressions et on les ajoute :

$$\left(\frac{E_x}{E_{mx}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x}{E_{mx}} \right) \left(\frac{E_y}{E_{my}} \right) \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

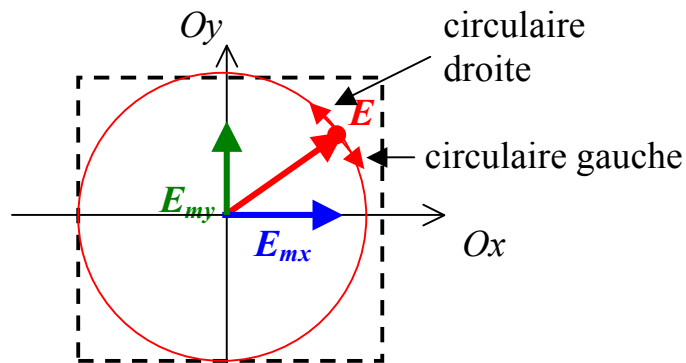
Il s'agit de l'équation d'une ellipse \rightarrow **polarisation elliptique**



c) Remarques

- cas particulier : $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1).\pi/2$ et $E_{mx} = E_{my}$

Dans ce cas la polarisation est circulaire



- sens de rotation :

$$\text{à } t = 0 \quad \rightarrow \quad E_y \text{ est max} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial t} \right|_{t=0} = E_{my} \sin(\varphi)$$

le sens de rotation est donc donné par le signe de $\sin(\varphi)$

- lumière polarisée et lumière naturelle

- ds le domaine de fréquence du visible on donne le nom de **vibration lumineuse** aux ondes électromagnétiques.
- la **lumière naturelle** n'est pas polarisée
- elle peut se représenter par la somme de 2 ondes rectilignes \perp sans relation de phase : $\varphi_2 - \varphi_1$ varie aléatoirement au cours du temps
- il est possible de polariser la lumière naturelle :
 - soit en superposant à une autre onde polarisée \rightarrow pol. partielle
 - soit à la traversée d'un système optique : polariseur

2.3.2 Exercice

On considère le champ E défini par ses composantes :

$$E_x = 0 \quad E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \quad E_z = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Préciser l'état de polarisation dans les 6 cas suivants :

a) $E_{0y} = 0$

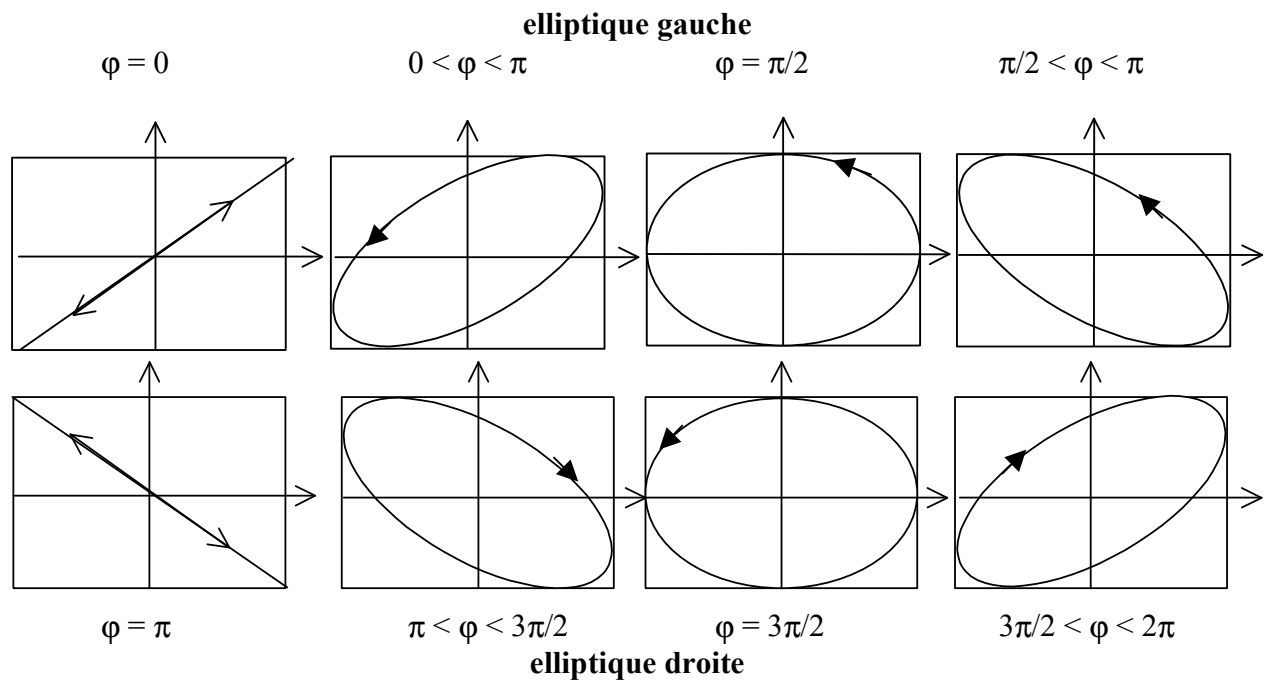
b) $E_{0z} = 0$

a) $\varphi = 0$

b) $\varphi = \pi$

c) $E_{0y} = E_{0z}$ et $\varphi = \pi/2$

d) $E_{0y} = E_{0z}$ et $\varphi = \pi/2$



2.4 Représentation complexe des ondes monochromatiques

2.4.1 Ecriture complexe

Considérons l'OPPEM monochromatique suivante :

$$\vec{E}(z,t) : \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \\ E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

En utilisant les vecteurs de la base on obtient :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \cdot \vec{e}_x + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \cdot \vec{e}_y$$

Soit encore en utilisant la notation complexe :

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ E_{0x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_1)} \vec{e}_x + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_2)} \vec{e}_y \right\}$$

ou encore :
$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right\} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 = \left\{ E_{0x} e^{i\varphi_1} \cdot \vec{e}_x + E_{0y} e^{i\varphi_2} \cdot \vec{e}_y \right\}$$

En résumé, \vec{E} est la partie réelle d'un vecteur complexe \underline{E}

$$\vec{E} = \text{Re} \left\{ \underline{E} \right\} \quad \text{avec} \quad \underline{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

2.4.2 Notation complexe et opérateurs différentiels

Tout l'intérêt de la notation complexe vient de la simplicité des transformations :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{Re} \left\{ \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right\} = \text{Re} \left\{ -i\omega \underline{E} \right\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \text{Re} \left\{ \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} \right\} = \text{Re} \left\{ ik_x \underline{E} \right\}$$

on va plutôt choisir :
$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = -i\omega \underline{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} = ik_x \underline{E}$$

Et pour les opérateurs :
$$\text{div} \vec{E} = i\vec{k} \cdot \vec{E}; \quad \text{rot} \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E}; \quad \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

Ces identités ne sont valables que pour des OPPEM monochromatiques

2.4.3 Notations complexes et Equations de Maxwell

Pour illustrer écrivons en notations complexes les Equations de Maxwell dans le vide et en dehors des charges et des courants:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{div}\vec{E} = 0 & \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{rot}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

En remplaçant les champs par des grandeurs complexes on obtient :

$$\left| \begin{array}{ll} i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 & i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega\vec{B} & i\vec{k} \wedge \vec{B} = -i\omega\mu_0\varepsilon_0\vec{E} \end{array} \right.$$

Les 2 premières relations montrent que \vec{E} et \vec{B} sont \perp à la dir. de propagation

Les 2 suivantes montrent que le trièdre $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ est direct

Ces 2 dernières relations montrent aussi, en égalant les modules :

$$k.E = \omega.B \quad \Rightarrow \quad B = k \cdot \frac{E}{\omega}$$

et donc $B.k = \omega\mu_0\varepsilon_0 E \quad \Rightarrow \quad k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \pm \frac{\omega}{c}}$

Le double signe correspond aux 2 sens possible de propagation

Et enfin, en posant $\vec{k} = k\vec{n}$ la relation $i\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}$ devient :

$$\boxed{i\vec{n} \wedge \vec{E} = c\vec{B}}$$

qui est la relation de structure de l'OPPEM

3. Energie électromagnétique

3.1 Considération qualitative

- **On a vu :**

- une région où règne un champ $E \rightarrow$ stockage d'énergie électrique $\left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right)$

- une région où règne un champ $B \rightarrow$ stockage d'énergie magnétique : $\left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)$

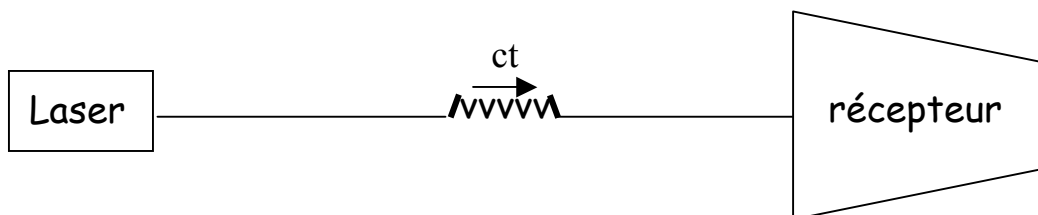
- **Observation :** l'onde EM transporte de l'énergie

- les charges en mvt d'une antenne radio engendrent un champ EM qui peut mettre en mvt les charges d'une antenne réceptrice

- le soleil qui nous chauffe et nous éclaire dès qu'il apparaît
 \rightarrow transport d'énergie dans le vide

- **localisation** d'énergie dans l'espace, vitesse finie de propagation:

Par exemple, lorsqu'un laser envoie un "pulse" de durée Δt très faible tel que $\Delta t \ll t_2 - t_1$ (t_1 date d'émission et t_2 date de réception):



Entre émission et réception, l'énergie se trouve "**localisée**" dans l'espace.

Donc une onde EM se propage à vitesse finie et transporte de l'énergie.

- **Multiples exemples :** soleil, onde radios, radiographie ...

puissance émise :	Emetteur radio	qqes 100 kW
	Ampoule électrique	qqes 10 W
	Laser	qqes mW
	Soleil	$3.7 \cdot 10^{26}$ W

3.2 Puissance cédée par un champ EM à des porteurs de charge

Soit une charge q animée d'une vitesse \vec{v} (dans le réf.) ds l'espace où se propage un champ EM .

elle subit la force :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

dont le travail pendant dt vaut :

$$\partial W = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \vec{f} \cdot \vec{v} \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \partial W = q\vec{E} \cdot \vec{v} dt$$

et la puissance :

$$P_1 = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Si q appartient à un ensemble de charges de densité n , la puissance fournie aux $dN = n \cdot d\tau$ particules vaut :

$$dP = dN \cdot P_1 = nq\vec{E} \cdot \vec{v} d\tau = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

où $\vec{J} = nq\vec{v}$ représente le vecteur densité de courant

Pour l'ensemble des charges contenues dans le volume fini V on obtient :

$$P_{champ \rightarrow charges} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

Si on désigne par E_c l'énergie cinétique des porteurs de charge, le Th. de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot d\tau$$

3.3 Identité de Poynting

On considère 2 des 4 équations de Maxwell :

$$(1) \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On multiplie (1) par $\frac{\vec{E}}{\mu_0}$ et (2) par $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ on obtient:

$$(1) \rightarrow (3) \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J} \cdot \vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} E^2 \right)$$

$$(2) \rightarrow (4) \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 \right)$$

$$\text{et (3) - (4)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} - \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \right] = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

avec $\operatorname{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$ on a :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{J} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0}$$

Voilà une équation tirée des Eq. de Maxwell sans aucune restriction ou condition

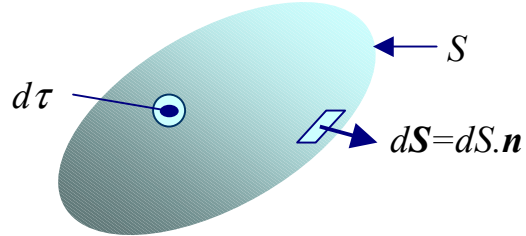
Cette équation est appelée : **Identité de Poynting**

3.4 Densité et flux d'énergie électromagnétique

On va donner un sens physique à chacun des termes de l'identité de Poynting

On intègre l'identité sur un volume V

:



$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau + \iiint_V \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau = 0$$

(bilan de puissance)

La surface S étant fixée, on peut transformer cette expression :

(On reconnaît les 2 premiers termes)

- $\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \frac{d}{dt} \left[\iiint_V \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \right] = \frac{du_{em}}{dt}$
- $\iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\tau = \frac{d}{dt} (E_c)$
- $\iiint_V \operatorname{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau = \oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d\vec{S}$

Le 3^{ème} peut s'écrire sous la forme d'un flux.

L'identité de Poynting devient alors :

$$\boxed{\frac{d}{dt} (u_{em} + E_c) = -\oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d\vec{S} = -\oiint_S \vec{R} \cdot d\vec{S}}$$

Ceci traduit que la variation dans le temps de l'énergie totale contenue dans V

est égale au flux d'un vecteur $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ qu'on appelle **vecteur de Poynting**

Ce vecteur est associé à la puissance transportée par le champ EM à travers S .

3.5 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting est défini dans le bilan local puissance:

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (= \text{puissance par unité de surface})$$

Ce vecteur est associé à la puissance transportée par le champ EM à travers S .

- \vec{C} est un vecteur axial, le trièdre $(\vec{E} \ \vec{B} \ \vec{R})$ est direct.

- \vec{R} est dirigé dans le sens de propagation de l'onde plane

- \vec{R} est la puissance transportée par unité de surface Unité : W / m^2 .
(en optique on utilise le lux)

- en désignant $\frac{dW_R}{dt}$ cette puissance, on écrit alors : $\frac{dW_R}{dt} = \oiint_S \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} d\vec{S}$

Théorème de Poynting

REMARQUES :

• les expressions $\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ et $\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right)$ ne sont pas linéaires

- si EM multiplié par k , ces 2 expressions sont multipliées par k^2
 \Rightarrow utilisation des complexes délicate

Dans le vide et en absence de charge on a :

$$\text{div} \vec{R} = -\frac{\partial u_{EM}}{\partial t}$$

équivalent au principe de conservation de la charge : $\text{div} \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

3.6 Application aux OPPM

- Dans l'OPPM, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont liés par : $\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$

- La densité d'énergie s'écrit : $u_{EM} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2}$

et avec : $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \rightarrow$

$$u_{EM} = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

(REM : $E = \|\vec{E}\|$ et $B = \|\vec{B}\|$)

- Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c} \right) \vec{n} = \left(\frac{cB^2}{\mu_0} \right) \vec{n}$$

- L'énergie transportée par l'onde peut s'exprimer de la manière suivante :

On considère une surface S \perp à la direction de propagation de l'onde

Le flux Φ_R de \vec{R} à travers \vec{S} vaut :

$$\Phi_R = R \cdot S = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c} \right) S$$

Ce qui donne pour l'énergie :

$$dW_R = \epsilon_0 E^2 S c dt = u_{EM} \cdot S \cdot c dt$$

dW_R représente l'énergie contenue ds le cylindre de base S et de longueur $c dt$

Ceci montre encore que l'énergie se propage à la vitesse c .

- **Eclairement**

En optique, un faisceau // peut être assimilé à une onde plane

Si un écran est placé \perp à ce faisceau il reçoit la puissance : $\Phi_R = \left(\frac{E^2}{\mu_0 c} \right) S$

Le rapport $\frac{\Phi_R}{S}$ représente l'éclairement et on le note souvent : $\xi = \frac{E^2}{\mu_0 c}$

REM: ξ est proportionnelle à E^2 et s'exprime en W/m^2

• **Cas des OPPM**

En considérant une direction de propagation suivant Oz on note :

$$\vec{E}(z,t) : \begin{cases} E_x = E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) \\ E_y = E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Avec la relation : $\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$ on obtient l'expression de R suivante :

$$\vec{R} = \frac{1}{c\mu_0} \left[E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t + \varphi_x) + E_{0y}^2 \cos^2(kz - \omega t + \varphi_y) \right] \vec{e}_z$$

Si on considère une surface S à Oz à l'abscisse z_0 le flux de \vec{R} s'écrit :

$$\Phi_R = S \vec{e}_z \cdot \vec{R} = \frac{S}{c\mu_0} \left[E_{0x}^2 \cos^2(kz - \omega t + \varphi_x) + E_{0y}^2 \cos^2(kz - \omega t + \varphi_y) \right]$$

Et la valeur moyenne de Φ_R dans le temps s'écrit ($\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$):

$$\boxed{\langle \Phi_R \rangle = \frac{1}{2c\mu_0} [E_{0x}^2 + E_{0y}^2] \cdot S}$$

REM : $\langle \Phi_R \rangle$ est indépendante de φ_x et φ_y donc de la polarisation de l'onde

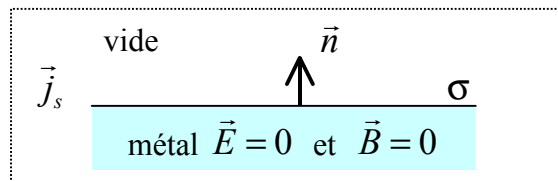
4. Réflexion d'une onde plane sur un conducteur parfait Ondes stationnaires

4.1 Introduction qualitative – Rappels

Conditions aux limites lors d'une discontinuité caractérisée par σ et \vec{j}_s :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{c} \uparrow \mathbf{n}_{12} \\ \text{---} \frac{2}{1} \end{array}$$

Ici, milieu 1 = métal



$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}} \Rightarrow \boxed{E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad E_{\parallel} = 0} \Rightarrow E \text{ est } \perp \text{ au plan}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}} \Rightarrow \boxed{B_{\parallel} = \mu_0 j_s \quad \text{et} \quad B_{\perp} = 0} \Rightarrow \vec{B} \text{ est dans le plan}$$

REM :

- 1 - \vec{E} et \vec{B} sont les champs au voisinage très proche, dans le métal ils sont nuls.
- 2- En fait, lors de sa propagation, le champ *EM* de l'onde ne s'annule pas brutalement dans le métal mais avec une profondeur de pénétration δ :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad \text{et} \quad \left(E = E_0 e^{-y/\delta} e^{i(kx - \omega t)} \right) \quad \omega : \text{ pulsation de l'OPPM}$$

avec γ : conductivité du milieu ($\gamma \rightarrow \infty$ pour un conducteur parfait et $\delta \rightarrow 0$)

Position du problème

une *OPPM* de pulsation ω se propage en direction d'un conducteur plan

→ on la désigne par l'onde incidente : $(E_i, B_i, n_i \dots)$

Cette onde agit sur les charges du métal qui engendrent alors des courants de même pulsation ω et qui, à leur tour, émettent une onde.

→ on la désigne par l'onde réfléchie : $(E_r, B_r, n_r \dots)$

Le champ *EM* total au niveau du plan sera : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$; $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r$

4.2 Réflexion d'une OPPEM monochr. sur un conducteur parfait

4.2.1 Incidence normale

Une OPPEM se propage ds le vide - suivant l'axe Ox
 - polarisation rectiligne suivant Oz

$$\Rightarrow \boxed{E_{ix} = 0 \quad E_{iy} = 0 \quad E_{iz} = E_0 e^{i(kx - \omega t)}}$$

avec E_0 réelle (pas de déphasage) et $k = \omega / c$

Elle rencontre en $x = 0$ conducteur ($\gamma \rightarrow \infty$) qui occupe tout l'espace $x > 0$

Les charges de la surface sont mises en mvt et rayonnent un champ EM
 Compte tenu des conditions aux limites le champ E_r se présente comme suit :

$$\Rightarrow \boxed{E_{rx} = 0 \quad E_{ry} = 0 \quad E_{rz} = -E_0 e^{i(k'x - \omega t)}}$$

$$\text{Equation d'onde} \Rightarrow k'^2 = \omega^2 / c^2 \Rightarrow k' = \pm \frac{\omega}{c}$$

$$\text{La solution } k' = +\frac{\omega}{c} \Rightarrow E = 0 \text{ sur tout le plan} \Rightarrow \boxed{k' = -\frac{\omega}{c} = -k}$$

$$\text{D'autre part : } \vec{B}_i = \frac{\vec{i} \wedge \vec{E}_i}{c} \text{ et } \vec{B}_r = \frac{-\vec{i} \wedge \vec{E}_r}{c}$$

On obtient finalement:

$$\begin{aligned} \text{- onde incidente : } & E_{ix} = 0 & E_{iy} = 0 & E_{iz} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ & B_{ix} = 0 & B_{iy} = -\frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} & B_{iz} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- onde réfléchie} & E_{rx} = 0 & E_{ry} = 0 & E_{rz} = -E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \\ & B_{rx} = 0 & B_{ry} = -\frac{E_0}{c} e^{i(-kx - \omega t)} & B_{rz} = 0 \end{aligned}$$

4.3 Structure de l'onde stationnaire

Effectuons la somme des champs incident et réfléchi :

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = E_0 e^{-i\omega t} [e^{i(kx)} - e^{i(-kx)}]$$

$$B_x = 0 \quad B_y = -\frac{E_0}{c} e^{-i\omega t} [e^{i(kx)} + e^{i(-kx)}] \quad B_z = 0$$

Ou en notation réelle :

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

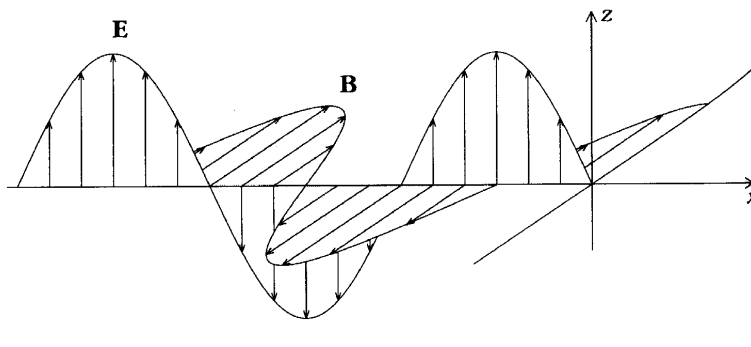
$$B_x = 0 \quad B_y = -\frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \quad B_z = 0$$

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont de la forme : $K \cdot f(x) \cdot g(t) \Rightarrow$ **onde stationnaire**

L'onde stationnaire est à opposer à l'onde progressive

Particularités de l'onde stationnaire

- les variables temps et espace sont séparées (c'est sa définition)
- \mathbf{E} et \mathbf{B} sont en quadrature de phase (un en sinus l'autre en cosinus)



- $\Rightarrow \mathbf{E}$ et \mathbf{B} présente un "décalage" spatial
- \Rightarrow il existe des plans où \mathbf{E} ou \mathbf{B} sont nuls \rightarrow **plan nodaux**
 - les plans nodaux de \mathbf{E} sont définis par : $\sin(kx)=0 \Rightarrow kx = n\pi$
 $\Rightarrow \boxed{x = \frac{n\lambda}{2}}$
 - les plans nodaux de \mathbf{B} sont définis par : $\cos(kx)=0 \Rightarrow kx = \frac{(2p+1)\pi}{2}$
 $\Rightarrow \boxed{x = p\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}}$
- Entre 2 plans nodaux de \mathbf{E} ou $\mathbf{B} \in$ des plans où \mathbf{E} ou \mathbf{B} sont max :
 \rightarrow **plans ventraux**

Exemples : a) Montrer qu'on peut calculer B à partir de : $r\vec{\partial}_t\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
c) Réflexion \rightarrow A2

4.4 Aspect énergétique

Expressions de E et B de l'onde stationnaire :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_y$$

En notation réelle on peut calculer : - la densité d'énergie : $u_{EM} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

- le vecteur de Poynting : $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ on obtient :

$$u_{EM} = 2\epsilon_0 E_0^2 [\sin^2(kx) \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cos^2(\omega t)]$$

et

$$\vec{R} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin(kx) \cos(kx) \sin(\omega t) \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$$

ou encore

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kx) \sin(2\omega t) \cdot \vec{e}_x$$

REMARQUES :

- \vec{R} s'annule au niveau des plans nodaux de \mathbf{E} et \mathbf{B}

$$\sin(2kx) = 0 \Rightarrow 2kx = \frac{4\pi}{\lambda} x = n\pi \Rightarrow \boxed{x = n \cdot \frac{\lambda}{4}}$$

\Rightarrow l'énergie reste confinée entre ces 2 plans (plans distants de $\lambda/4$)

- Le calcul de la moyenne dans le temps, à une abscisse x donnée, donne :

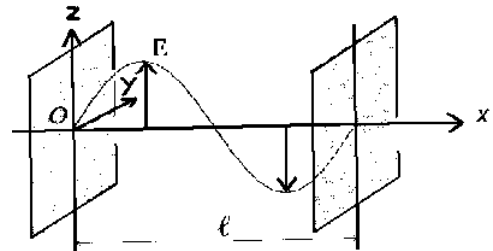
$$\langle u_{EM} \rangle_t = \epsilon_0 E_0^2 \Rightarrow \text{la valeur moy. de la densité d'énergie est indép. de } x$$

$$\langle \vec{R} \rangle_t = 0 \Rightarrow \text{le flux moyen d'énergie à travers un plan } \perp \text{ à } Ox \text{ est nul}$$

4.5 Notions de modes propres d'une cavité

4.5.1 Onde stationnaire entre 2 plans métalliques parallèles

Une onde stationnaire peut exister entre 2 plans nodaux si ces plans coïncident avec des plans nodaux de \mathbf{E} .



Soit ℓ la distance entre les 2 plans on obtient : $\ell = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ (n entier)

Les ondes stationnaires sont celles que leur période est une fraction du temps nécessaire à l'onde pour faire un aller-retour:

$$T_n = 2\ell / nc \quad \text{ou encore} \quad c = 2\ell / nT$$

4.5.2 Résolution plus formelle

On cherche une solution de l'Equation d'onde de la forme : $\vec{E} = f(x)e^{-i\omega t}\vec{e}_z$

L'équation d'onde donne : $\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$ avec $k = \omega/c$

La solution d'une telle équation est de la forme :

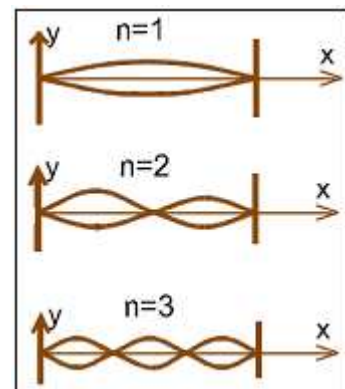
$$f(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$f(x=0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$f(x=\ell) = 0 \Rightarrow A_2 \sin(k\ell) = 0 \Rightarrow k\ell = n\pi$$

c'est-à-dire $\Rightarrow \boxed{\ell = n \frac{\lambda}{2}}$



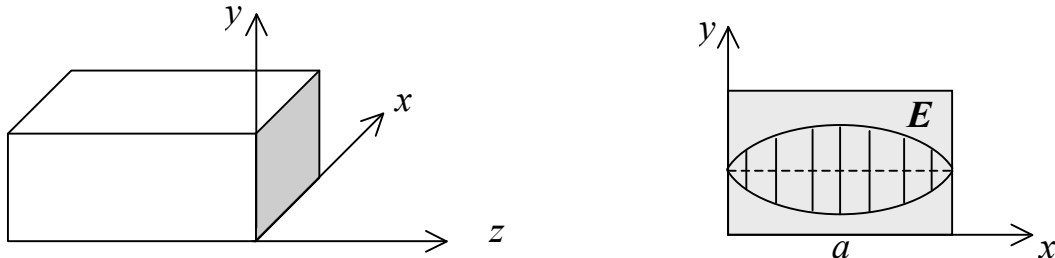
5. Notion sur la propagation guidée

5.1 Préambule

- La transmission électromagnétique entre divers éléments s'effectue de différentes façons :
 - $f < 1 \text{ kHz}$ → simples fils, cas des circuits électriques.
 - $1 \text{ kHz} < f < 1 \text{ GHz}$, les fils se comportent comme des antennes qui rayonnent avec une puissance $P \approx f^4$
 - on utilise alors des câbles coaxiaux
 - pour les connexions téléphoniques on utilise simplement des fils torsadés
 - $f > 1 \text{ GHz}$, les OEM peuvent se propager dans un tube métallique creux
 - guide d'onde
 - $f \approx 10^{15} \text{ Hz}$ (lumière) : les OEM se propagent dans des milieux particuliers
 - fibres optiques
- Un guide d'onde est une "canalisation" métallique cylindrique soit vide soit remplie d'un diélectrique, où peuvent se propager des OEM
- La propagation des OEM ds le guide d'onde est soumise à certaines conditions et elle diffère alors de la propagation des OEM libres
- Pour un guide d'onde de géométrie donnée, propagation si $\omega > \omega_c$
 - pulsation de coupure
 - la vitesse dépend alors de la pulsation
 - phénomène de dispersion ($v \neq c = \omega/k$)
- Autre particularité, E et/ou B peuvent avoir une composante longitudinale

5.2 Cas d'un guide rectangulaire

Considérons un guide d'onde à parois rectangulaires orienté comme suit :



Rappelons les conditions aux limites des 2 champs : $\vec{E}_{\text{tangential}} = 0$ $\vec{B}_{\text{orthogonal}} = 0$

Choisissons intuitivement 1 champ qui devrait pouvoir se propager ds ce guide:

$$\vec{E} : E_x = 0 \quad E_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \quad E_z = 0$$

Onde polarisée suivant Oy , se propageant suivant Oz et E s'annule en $x = 0$ et a
D'autre part notons les composantes en $y = 0$ et $y = b$ sont nulles également

Cherchons \vec{B} et la relation qui lie ω et k_g

Equations de Maxwell :

- $\text{div} \vec{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{vérifiée}$

- $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \vec{E} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \begin{cases} B_x = -\left(\frac{k_g E_0}{\omega}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \\ B_y = 0 \\ B_z = -\left(\frac{i\pi E_0}{a\omega}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \end{cases}$

- $\text{div} \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{vérifiée}$

- $\text{rot} \vec{B} = \left(\frac{1}{c^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ conduit à : $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ (on n'a plus : $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$)

Conclusions :

1 - On voit bien que :

- B_x s'annule en $x = 0$ et a
 - B_y étant toujours nulle,
- ⇒ les conditions aux limites sont respectées

2 - La dernière relation $k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$ montre que : $k_g^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2}$

Cette relation porte le nom de : **relation de dispersion**

$v_\varphi = \frac{\omega}{k_g}$ est la vitesse de phase qui n'est plus constante → **dispersion**

d'autre part l'OEM ne peut se propager que si : $\omega > \omega_g = \frac{\pi c}{a}$

3 - B a une composante suivant Oz → l'onde n'est pas transverse.

Dans le cas général on choisira une onde de la forme :

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\vec{B} = (B_{0x}\vec{e}_x + B_{0y}\vec{e}_y + B_{0z}\vec{e}_z)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

où E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} et B_{0x}, B_{0y}, B_{0z} sont des fonctions dépendantes de x et y

On montre (Eq. de Max.) que $E_{0x}(x, y), E_{0y}(x, y), B_{0x}(x, y),$ et $B_{0y}(x, y)$ s'expriment en fonction des composantes : $E_{0z}(x, y)$ et $B_{0z}(x, y)$

Ces composantes vérifient alors les équations :

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right)E_{0z} = 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2\right)B_{0z} = 0$$

5.3 Modes de propagation

Dans le 1er exemple nous avons trouvé : $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} \neq 0$

Mais dans le cas général, les 2 composantes E_{0z} et B_{0z} sont non nulles.

Par raisons de commodité on classe les OEM en mode :

A - **Mode Transversal électrique : TE**

OEM pour les quelles la composante $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} \neq 0$

B - **Mode Transversal magnétique : TM**

OEM pour les quelles la composante $E_{0z} \neq 0$ et $B_{0z} = 0$

Le cas général correspond à la superposition d'un mode TE et TM.

C - **Mode Transversal Electromagnétique : TEM**

D'après les équations générales précédentes, si $E_{0z} = 0$ et $B_{0z} = 0$ on a :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

→ pas de dispersion

On montre que ce type d'OEM ne peut exister que si le guide contient un ou plusieurs conducteurs à l'intérieur.

5.4 Mode TE du guide d'onde rectangulaire

Reprenons les équations générales :

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) E_{0z} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) B_{0z} = 0$$

Mode TE $\rightarrow E_{0z} = 0 \Rightarrow 1^{\text{ère}}$ équation vérifiée

Pour la seconde on pose : $B_{0z} = f(x).g(y)$ et $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$

$$\text{On obtient : } g(y) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + f(x) \frac{d^2 g(y)}{dy^2} + \alpha^2 f(x)g(y) = 0$$

$$\text{Ou encore : } \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} - \alpha^2$$

$$\text{Ce qui impose : } \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = A \text{ et } \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -(A + \alpha^2)$$

f et g s'annulent ssi : $A < 0$ et $A + \alpha^2 > 0$ (si $A > 0$ sol. exponentielle)

$$\text{ce qui conduit à : } \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -k_1^2 f(x) \text{ et } \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -k_2^2 g(y)$$

$$\text{avec } k_1^2 + k_2^2 = \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$$

La solution est finalement : $B_{0z} = A_1 \cos(k_1 x + \varphi_1).A_2 \cos(k_2 y + \varphi_2)$

Avec les relations (9) à (12) on obtient les composantes E_{0x}, E_{0y}, B_{0x} et B_{0y}

On peut alors exprimer les conditions aux limites ce qui conduit à :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \text{ et } k_1 = m\pi/a \text{ et } k_2 = n\pi/b \text{ (avec } m \text{ et } n \text{ entiers)}$$

Et finalement, avec $k_1^2 + k_2^2 = \omega^2/c^2 - k_g^2$, on obtient :

$$\boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2}$$

relation de dispersion

Etude du mode $\mathbf{TE}_{1,0}$

Les entiers m et n de la relation de dispersion définissent le mode $\mathbf{TE}_{m,n}$

Le mode $\mathbf{TE}_{1,0}$ correspond donc à $m = 1$ et $n = 0$

$$\rightarrow k_1 = \frac{\pi}{a} \text{ et } k_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

avec $\omega > \omega_0 = \frac{\pi c}{a}$

Les champs E et B s'expriment alors par :

$$E_{0x} = 0; \quad E_{0y} = \frac{i\omega}{\pi} a B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \quad E_{0z} = 0;$$

$$B_{0x} = -ik_g \frac{a}{\pi} B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right); \quad B_{0y} = 0; \quad B_{0z} = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right);$$

Le mode $\mathbf{TE}_{1,0}$ correspond à ω la plus petite

Exemple : pour un guide d'onde $a = 22,86\text{mm}$ et $b = 10,16\text{mm}$

- Le mode $\mathbf{TE}_{1,0}$: $\omega_1 = 6,56$ GHz
- Le mode $\mathbf{TE}_{2,0}$: $\omega_1 = 13,12$ GHz
- Le mode $\mathbf{TE}_{0,1}$: $\omega_1 = 14,76$ GHz
- Le mode $\mathbf{TM}_{1,1}$: $\omega_1 = 16,15$ GHz

Ainsi ,une OEM de fréquence 9 GHz, suel le mode $\mathbf{TE}_{1,0}$ est excité

Interprétation du mode TE_{1,0}

Je reprends l'expression du champ électrique du mode TE₁₀

$$\vec{E} = \frac{i\omega}{\pi} a B_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(k_g z - \omega t)} \vec{e}_y$$

or
$$i \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[e^{\left(\frac{i\pi x}{a}\right)} - e^{\left(-\frac{i\pi x}{a}\right)} \right]$$

On peut donc écrire : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ avec

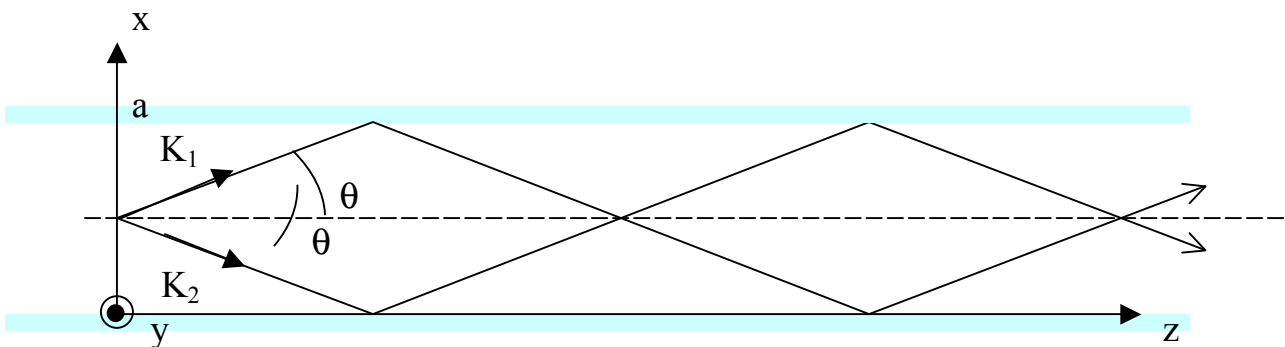
$$\vec{E}_1 = \frac{\omega a B_0}{2\pi} e^{i\left(\frac{\pi x}{a} + k_g z - \omega t\right)} \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = -\frac{\omega a B_0}{2\pi} e^{i\left(-\frac{\pi x}{a} + k_g z - \omega t\right)} \vec{e}_y$$

C'est-à-dire 2 OPPM de vecteurs d'onde :

$$\vec{K}_1 = \left(\frac{\pi}{a}\right) \vec{e}_x + k_g \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{K}_2 = -\left(\frac{\pi}{a}\right) \vec{e}_x + k_g \vec{e}_z$$

se propageant dans le vide puisque : $K_1^2 = K_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Le mode TE_{1,0} est finalement la superposition de 2 OPPM se propageant de façon symétrique par rapport à l'axe de la génératrice du guide d'onde:



La vitesse moyenne de l'onde suivant Oz vaut :

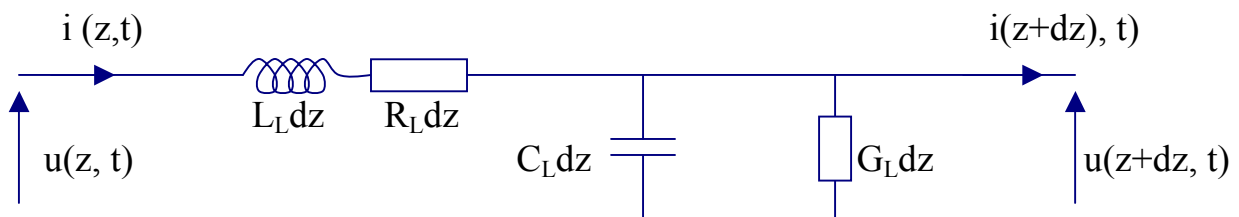
$$v_z = c \cdot \cos(\theta) = \frac{c k_g}{\sqrt{k_g^2 + (\pi/a)^2}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_g}{\omega}}$$

= vitesse de groupe \neq vitesse de phase

6. Lignes de transmission

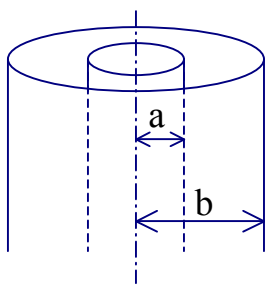
6.1 Modélisation électrique

- la ligne est à la base des méthodes de télécommunication.
- Elle permet de propager un signal électrique via les champs E et B générés entre les conducteurs. La ligne est avant tout un guide d'onde
- Comme il est plus facile de parler de courants et de tensions, on modélise les lignes à l'aide de constantes réparties qui sont :
 - capacité linéique engendrée C_L par la répartition des charges entre les conducteur qui crée le champ électrique
 - inductance linéique L_L due aux courants qui circulent dans les conducteurs et qui engendrent le champ magnétique
 - une résistance linéique R_L liée à l'imperfection des conducteurs
 - une conductance linéique G_L issue des fuites de courant entre les conducteurs.



cellule élémentaire qui lie les (u, i) de la position z à ceux de la position

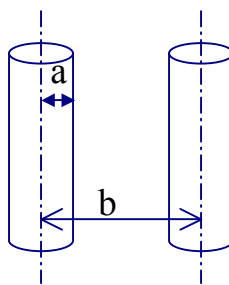
- Types de lignes classiques :



$$C_L = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

$$L_L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

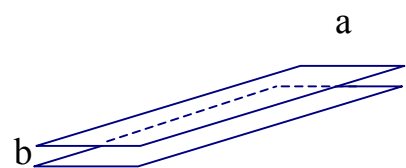
Câble coaxial



$$C_L = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}$$

$$L_L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(b/a)$$

ligne bifilaire



$$C_L = \frac{\epsilon_0 a}{b}$$

$$L_L = \frac{\mu_0 b}{a}$$

ligne à rubans

6.2 Equations des télégraphistes

- loi des mailles

$$\begin{aligned}
 u(z,t) &= L_L dz \frac{\partial i}{\partial t} + R_L dzi(z,t) + u(z + dz,t) \\
 \Rightarrow \frac{u(z + dz,t) - u(z,t)}{dz} &= - \left(L_L \frac{\partial i}{\partial t} + R_L i(z,t) \right) \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial z} = - \left(L_L \frac{\partial i}{\partial t} + R_L i \right)} & \quad (1)
 \end{aligned}$$

- loi des nœuds

$$\begin{aligned}
 i(z,t) &= C_L dz \frac{\partial u}{\partial t} + G_L dzu(z,t) + i(z + dz,t) \\
 \Rightarrow \frac{i(z + dz,t) - i(z,t)}{dz} &= - \left(C_L \frac{\partial u}{\partial t} + G_L u(z,t) \right) \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial t} = - \left(C_L \frac{\partial u}{\partial t} + G_L u \right)} & \quad (2)
 \end{aligned}$$

- en dérivant (1) et (2) par rapport à z et t on obtient :

$$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \left(L_L \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} + R_L \frac{\partial i}{\partial z} \right) \right. \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} = - \left(L_L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R_L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = - \left(C_L \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + G_L \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right. \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = - \left(C_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G_L \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right. \quad (6)$$

- on reporte (6) et (2) dans le second membre de (3) on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \left[-L_L \left(C_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G_L \frac{\partial u}{\partial t} \right) - R_L \left(C_L \frac{\partial u}{\partial t} + G_L u \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L_L C_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -(R_L C_L + L_L G_L) \frac{\partial u}{\partial t} + R_L G_L u \quad (7)$$

- on reporte (4) et (1) dans le second membre de (5) on obtient :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = - \left(C_L \left(L_L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R_L \frac{\partial i}{\partial t} \right) + G_L \left(L_L \frac{\partial i}{\partial t} + R_L i \right) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - C_L L_L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = (R_L C_L + G_L L_L) \frac{\partial i}{\partial t} + R_L G_L i \quad (8)$$

- Enfin si on néglige les pertes dans les lignes on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - L_L C_L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - C_L L_L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}}$$

- On retrouve l'équation d'une onde se propageant à la vitesse :

$$v^2 = \frac{1}{L_L C_L} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow v = c$$

- Conclusion : dans une ligne sans perte, un signal électrique se propage sous la forme d'une onde à la vitesse c

- Exemple : une tension sinusoïdale de fréquence 3 GHz est appliquée en bout de ligne. Donner le signal sur la ligne en 1 pt situé à 1.5λ .

Solution de l'équation : $V(z, t) = V_m \sin(\omega t - kz + \varphi)$
 en $z = 0$: on a $V(0, t) = V_m \sin(\omega t) \rightarrow$ c'est la source ($\varphi = 0$)
 en $z_1 = 1.5\lambda$, on a $V_1(z, t) = V_m \sin(\omega t - (2\pi/\lambda) \cdot 1.5\lambda)$
 $V_1(z, t) = V_m \sin(\omega t - 3\pi)$
 $V_1(z, t) = -V_m \sin(\omega t)$

6.3 Impédance caractéristique

Considérons :

- une ligne sans perte
- un signal de fréquence f (notation complexe):

$$\underline{u}(z,t) = \underline{U}(z,t).e^{j\omega t} \quad \underline{i}(z,t) = \underline{I}(z,t).e^{j\omega t}$$

Equation des télégraphistes appliquée à u donne :

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} - (j\omega)^2 C_L L_L \underline{U} = 0$$

équation caractéristique : $r^2 - (j\omega)^2 C_L L_L = 0 \Rightarrow r = \pm j\omega \sqrt{C_L L_L} = \pm j \frac{\omega}{v}$

qui aboutit à la solution : $\underline{U}(z,t) = U_i e^{-j \frac{\omega}{v} z} + U_r e^{+j \frac{\omega}{v} z}$

et finalement :
$$\underline{u}(z,t) = U_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v} z)} + U_r e^{j(\omega t + \frac{\omega}{v} z)}$$

solution qui correspond à des ondes se propageant en sens inverses

Cette solution appliquée à l'équation (1) donne :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= U_i \left(-\frac{j\omega}{v} \right) e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v} z)} + U_r \left(\frac{j\omega}{v} \right) e^{j(\omega t + \frac{\omega}{v} z)} = -L_L (j\omega) I(z) e^{j\omega t} \\ \Rightarrow i(z,t) &= \frac{1}{L_L v} \left(U_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v} z)} - U_r e^{j(\omega t + \frac{\omega}{v} z)} \right) \\ \Rightarrow i(z,t) &= \sqrt{\frac{C_L}{L_L}} \left(U_i e^{j(\omega t - \frac{\omega}{v} z)} - U_r e^{j(\omega t + \frac{\omega}{v} z)} \right) \end{aligned}$$

Comme tension et courant sont liés via l'impédance, $u = Z i$ on obtient une impédance dite "impédance caractéristique" Z_c qui vaut :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}}$$

Notons que pour l'onde réfléchie on : $u = -Z i$ car le courant se propage dans le sens des z négatifs

Exemple : câble de télévision

- diamètre de l'âme : $d = 0.584 \text{ mm}$
- diamètre de la gaine : $D = 3 \text{ mm}$
- diélectrique $\epsilon_r = 3.71 \rightarrow$ on remplace ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$

$$\Rightarrow C_L = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(D/d)} \approx 87.4 \text{ pF/m}$$

$$L_L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(D/d) \approx 0.471 \mu\text{H/m}$$

L'impédance caractéristique Z_c vaut :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L_L}{C_L}} = \frac{\ln(D/d)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0\epsilon_r}} \approx 73.4 \Omega$$

en pratique elle fait 75Ω

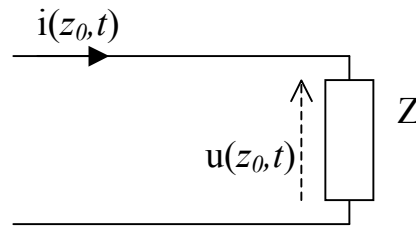
La vitesse de propagation des signaux sera de :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \approx 1.56 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx c/2$$

6.4 Coefficients de réflexion : définition

Si la ligne est fermée en $z = z_0$ par une impédance complexe Z , la loi d'Ohm permet d'écrire :

$$u(z_0, t) = Z i(z_0, t)$$



On peut écrire tension et courant en termes d'ondes incidente et réfléchie :

$$\begin{cases} u(z, t) = u_i(z, t) + u_r(z, t) \\ i(z, t) = \frac{1}{Z_c} [u_i(z, t) - u_r(z, t)] \end{cases} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} u_i(z, t) = U_i e^{j(\omega t - kz)} \\ u_r(z, t) = U_r e^{j(\omega t + kz)} \end{cases}$$

On définit alors les coefficients de réflexion en tension et en courant par :

$$\rho_u = \frac{u_r(z_0, t)}{u_i(z_0, t)} \quad \text{et} \quad \rho_i = \frac{i_r(z_0, t)}{i_i(z_0, t)} = -\rho_u$$

On peut maintenant écrire la loi d'Ohm aux bornes de Z (en $z = z_0$):

$$u_i(z_0, t) + u_r(z_0, t) = \frac{Z}{Z_c} [u_i(z_0, t) - u_r(z_0, t)]$$

$$\Rightarrow Z_c \left[1 + \frac{u_r(z_0, t)}{u_i(z_0, t)} \right] = Z \left[1 - \frac{u_r(z_0, t)}{u_i(z_0, t)} \right]$$

$$\Rightarrow \rho_u = \frac{u_r(z_0, t)}{u_i(z_0, t)} = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} \quad \text{et} \quad \rho_i = \frac{i_r(z_0, t)}{i_i(z_0, t)} = \frac{-u_r(z_0, t)/Z_c}{u_i(z_0, t)/Z_c} = -\rho_u$$

Finalement :

$$\rho_u = \frac{Z - Z_c}{Z + Z_c} = -\rho_i$$

6.5 Adaptation d'impédance

La valeur de l'impédance en bout de ligne est donc importante pour le phénomène de réflexion

- Si l'extrémité est fermée avec l'impédance caractéristique, $Z = Z_c$

$$\rho_u = \rho_i = 0$$

on supprime toute réflexion d'onde dans une ligne de transmission.

→ **adaptation d'impédance**

- Si l'extrémité est "ouverte" → $Z = \infty$:

$$\rho_u = 1 \quad \text{et} \quad \rho_i = -1$$

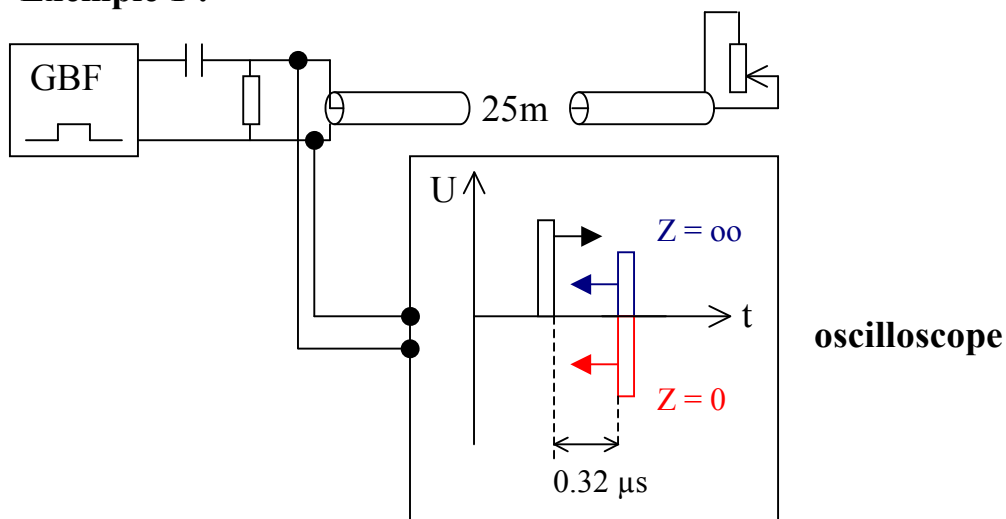
il y a réflexion totale avec inversion de l'amplitude de courant

- Si l'extrémité est "fermée", court-circuit → $Z = 0$:

$$\rho_u = -1 \quad \text{et} \quad \rho_i = 1$$

il y a réflexion totale avec inversion de l'amplitude de la tension

Exemple 1 :



Le circuit R_c est là pour fabriquer un pulse étroit.

$$Z_c = 75 \Omega \quad v = 1.56 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ A/R} = 50/v = 0.32 \mu\text{s}$$

Exemple 2 : Soit une ligne de transmission ($Z_c = 75\Omega$) fermée sur une impédance $Z = 50\Omega$ sur laquelle se propage des ondes électriques sinusoïdales de la forme :

$$i(x,t) = I_i e^{j(\omega t - kx)} + I_r e^{j(\omega t + kx)}$$

Avec l'expression de la puissance électrique moyenne dissipée:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ u \cdot i^* \}$$

on peut déterminer le coefficient de réflexion en puissance :

$$\text{ondes incidente : } \langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left| Z_c I_i e^{j(\omega t - kx)} \cdot [I_i e^{j(\omega t - kx)}]^* \right| = \frac{1}{2} Z_c |I_i|^2$$

$$\text{onde réfléchie : } \langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left| -Z_c I_r e^{j(\omega t + kx)} \cdot [I_r e^{j(\omega t + kx)}]^* \right| = \frac{1}{2} Z_c |I_r|^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left| \frac{I_r}{I_i} \right|^2 = |\rho_l|^2 = \left| \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \right|^2 = 0.04$$

4% de l'énergie est réfléchie, le reste est dissipé dans l'impédance Z_c

Si $Z = Z_c \Rightarrow R = 0 \rightarrow$ la puissance est entièrement absorbée par l'impédance de bout de ligne

7. ANNEXE1

Franchissement d'obstacles :

Cette propriété définit la capacité d'une onde à **pouvoir passer par dessus un obstacle naturel** de type montagneux. En utilisation courante, seule la **HF** a cette propriété. La VHF et l'UHF n'en sont pas capables.

Pénétration d'obstacles :

Cette propriété définit la capacité d'une onde à **pénétrer un obstacle** (immeubles, tunnels, zones urbaines denses, ...). En utilisation courante, c'est l'**UHF** qui est recommandée pour cela. La VHF est un peu moins bonne et la HF en est incapable.

Pénétration dans l'eau :

Cette propriété définit la capacité d'une onde à **pénétrer dans l'eau**. Seule la **VLF** le peut. C'est pour cela qu'elle est utilisée par les sous marins.

Réflexion en surface :

Cette propriété définit la capacité d'une onde à **se propager en direct à la surface de la Terre** et ce, sans utiliser les couches ionosphériques. Le déplacement des ondes se fait en ligne droite. Leur portée est donc limitée par la courbure de la terre et les obstacles qu'elles rencontrent. La réflexion en surface peut atteindre 80 à 100 Km.

La puissance d'émission, les phénomènes de diffraction (déviation des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle) et de réflexion, dus à la traversée de l'humidité de l'air peuvent, sous certaines conditions précises mais aléatoires, porter ces distances à 500 Km. **Plus la fréquence est élevée, plus la portée des ondes en surface diminue**. Une onde HF parcourra une distance directe (c'est à dire sans utiliser la réflexion ionosphérique) bien supérieure à la même onde émise sur une fréquence UHF.

Réflexion ionosphériques :

Cette propriété définit la capacité d'une onde à **se réfléchir sur les couches ionosphériques** (de 70 à 375 Km de la Terre). Cette réflexion sur ces couches hautes ou basses **augmente notablement la portée des ondes**. De plus, dès que les ondes ont quitté l'atmosphère proche de la Terre (jusqu'à 8 Km) qui les freine, elles se déplacent dans un vide relatif. Elles ne subiront un nouveau frein qu'à leur retour dans l'atmosphère. **Cette aptitude permet de faire le tour de la Terre avec quelques dizaines de watts de puissance**. En utilisation courante, seule la **HF** bénéficie de cette possibilité de réflexion ionosphérique.

8. Onde dans un guide d'onde : cas général

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

$$\vec{B} = (B_{0x}\vec{e}_x + B_{0y}\vec{e}_y + B_{0z}\vec{e}_z)e^{i(k_g z - \omega t)}$$

où E_{0x}, E_{0y}, E_{0z} et B_{0x}, B_{0y}, B_{0z} sont des fonctions dépendantes de x et y

Equations de Maxwell :

$$\bullet \operatorname{div}\mathbf{B}=0 \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0y}}{\partial y} + ik_g B_{0z} = 0$$

$$\bullet \operatorname{div}\mathbf{E}=0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0y}}{\partial y} + ik_g E_{0z} = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{\operatorname{rot}}\mathbf{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i\omega B_x \Rightarrow \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - ik_g E_{0y} = i\omega B_{0x} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega B_y \Rightarrow ik_g E_{0x} - \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} = i\omega B_{0y} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z \Rightarrow \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} = i\omega B_{0z} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\bullet \overrightarrow{\operatorname{rot}}\mathbf{B} = \left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_x \Rightarrow \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - ik_g B_{0y} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_{0x} \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_y \Rightarrow ik_g B_{0x} - \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_{0y} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_z \Rightarrow \frac{\partial B_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0x}}{\partial y} = -\left(\frac{i\omega}{c^2}\right)E_{0z} \end{array} \right. \quad (8)$$

Maintenant on exprime E_{0x}, E_{0y}, B_{0x} et B_{0y} en fonction de : E_{0z} et B_{0z}

Avec (3) et (7) on arrive à :

$$i \left[k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_{0y} = k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}$$

$$i \left[\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right] B_{0x} = \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial y} - k_g \frac{\partial B_{0z}}{\partial x}$$

Avec (4) et (6) on arrive à :

$$i \left[k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_{0x} = k_g \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} - \omega \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$$

$$i \left[k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right] B_{0y} = \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_{0z}}{\partial x} - k_g \frac{\partial B_{0z}}{\partial y}$$

Ce qui conduit finalement à (en admettant $k_g^2 \neq \omega^2/c^2$):

$$E_{0x} = i \frac{\omega(\partial B_{0z}/\partial y) + k_g(\partial E_{0z}/\partial x)}{\omega^2/c^2 - k_g^2} \quad (9)$$

$$B_{0x} = i \frac{k_g(\partial B_{0z}/\partial x) - \omega(\partial E_{0z}/\partial y)}{\omega^2/c^2 - k_g^2} \quad (10)$$

$$E_{0y} = i \frac{-\omega(\partial B_{0z}/\partial x) + k_g(\partial E_{0z}/\partial y)}{\omega^2/c^2 - k_g^2} \quad (11)$$

$$B_{0y} = i \frac{k_g(\partial B_{0z}/\partial y) + \omega/c^2(\partial E_{0z}/\partial x)}{\omega^2/c^2 - k_g^2} \quad (12)$$

Le cas particulier $k_g^2 = \omega^2/c^2$ doit être traité à part

En introduisant ces 4 relations dans les équations (1), (2), (5) et (8), on obtient:

$$\frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) E_{0z} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) B_{0z} = 0$$