ELECTROSTATIQUE - 2

1. Rappels

Force de coulomb entre q_1 et q_2 :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1 q_2}{r^2}.\vec{u}_{12}$$

Champ électrique créé en M par une charge en P :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{PM^2}.\vec{u}_{PM}$$

Potentiel créé par une charge q en un point M:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{PM}$$

Relation champ potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \qquad ou \qquad V = -\int \vec{E}.d\vec{\ell}$$

Energie électrostatique d'une charge q dans un potentiel V:

$$Up = q.V$$

Dipôle électrostatique : moment dipolaire :

$$\vec{p} = q.\overrightarrow{NP}$$

2. Outils mathématiques

2.1. Systèmes classiques de coordonnées

|→ nécessité de faire un repérage précis des positions (et de *t*)

2.1.1. Coordonnées cartésiennes

- Les coordonnées du point *M* dans *R* sont : $x = OI$; $y = OJ$; $z = OK$

- La base associée à *M* est : $\boldsymbol{e_x}$ → axe *Ox*
  $\boldsymbol{e_y}$ → axe *Oy*
  $\boldsymbol{e_z}$ → axe *Oz*.

2.1.2. Coordonnées cylindriques

- Les coordonnées du point *M* dans *R* sont :

$$\left|\begin{array}{l} \rho = OH \\ \varphi = (Ox,\ OH) \\ z = OK \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right.$$

- La base cylindrique associée à *M* est :
  - $\boldsymbol{e_\rho}$ radial (perpendiculaire à l'axe *Oz)*
  - $\boldsymbol{e_\varphi}$ orthoradial (perpend. à *Oz* et e_ρ)
  - $\boldsymbol{e_z}$ vecteur axial (suivant *Oz*)

2.1.3. Coordonnées sphériques

- Les coordonnées du point *M* dans *R* sont :

$$\left|\begin{array}{l} r = OM \\ \theta = (Oz,\ OM) \\ \varphi = (Ox,\ OH) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right.$$

- La base sphérique associée à *M* est :
  - $\boldsymbol{e_r}$ direction *OM*
  - $\boldsymbol{e_\theta}$ _|_ à *OM,* ds le plan *HOz*
  - $\boldsymbol{e_\varphi}$ _|_ au plan *Hoz*

2.2. Volume élémentaire dans chaque système de coordonnées

- Le volume élémentaire est défini par un déplacement élémentaire
  → de *M* vers *M'* : **dM** = **MM'**

2.2.1. Coordonnées cartésiennes

$$d\vec{M} = dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}z$$

- volume élémentaire → $dV = dx.dy.dz$
  dV = 1 parallélépipède de côtés dx, dy, dz

2.2.2. Coordonnées cylindriques

$$d\vec{M} = d\rho.\vec{e}_\rho + \rho d\varphi.\vec{e}_\varphi + dz.\vec{e}z$$

- volume élémentaire → $dV = \rho \,.\, d\rho \,.\, d\varphi \,.\, dz$
  $dV \neq dx.dy.dz$
  dV = 1 parallélépipède **courbe**

2.2.3. Coordonnées sphériques

$$d\vec{M} = dr.\vec{e}_r + r d\theta.\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi.\vec{e}_\varphi$$

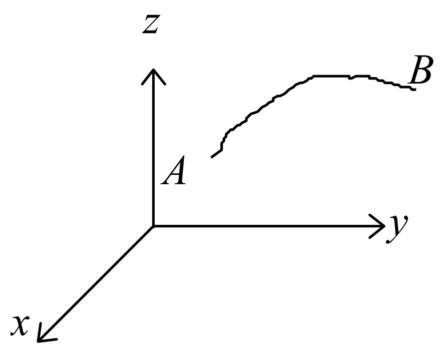
- volume élémentaire → $dV = dr \,.\, r\, d\theta \,.\, r\, sin\theta\, d\varphi$

  dV = 1 parallélépipède **courbe**

2.3. Intégrales des fonctions de points

2.3.1. Intégrale curviligne

Soit une fonction $f(M)$ définie en tout point d'une courbe AB.

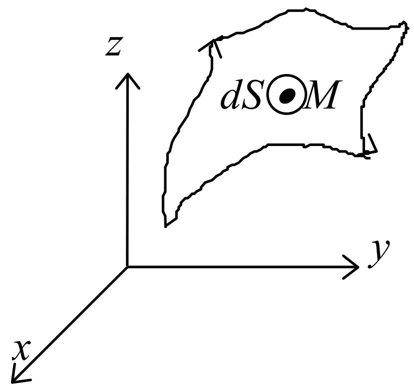


On appelle intégrale curviligne de f la quantité :

$$\int f(M).d\ell$$

2.3.2. Intégrale de surface

Soit une fonction $f(M)$ définie en tout point d'une surface S.



On appelle intégrale de surface de la fonction f la quantité :

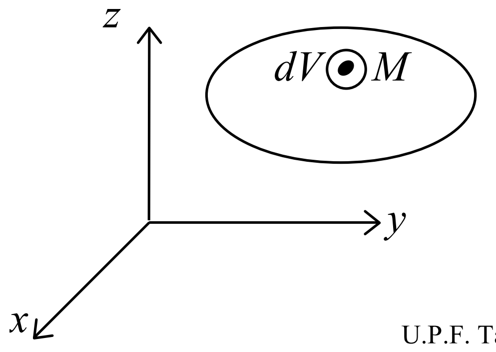
$$\iint f(M).dS$$

2.3.3. Intégrale de volume

Soit une fonction $f(M)$ définie en tout point d'un volume V

On appelle intégrale de volume de f la quantité :

$$\iiint f(M).dV$$

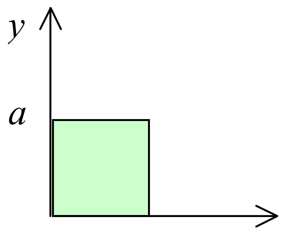


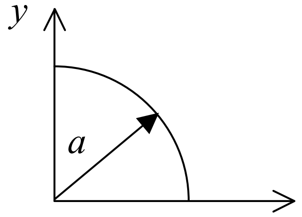
2.3.4. Exemples de calculs

- Calcul du volume et de la surface d'un cylindre

- Calcul du volume et de la surface d'une sphère

- Intégrale de surface de $f(M) = x.y$: - sur le carré de côté a
  - sur le ¼ de cercle de rayon a





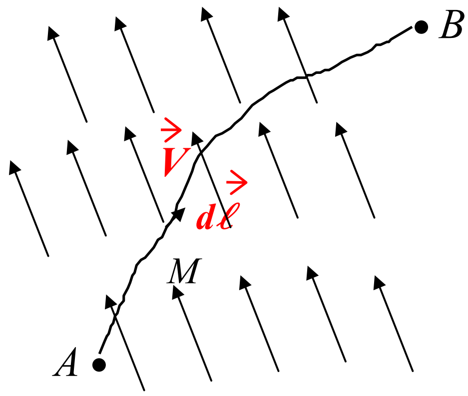
- Charge totale d'un disque de densité $\sigma(P)=\sigma_0\ (1-y^2/a)$ où $y = OP$

- Charge totale d'un sphère chargée en volume $\rho=\rho_0(1-ar^2/R^2)$

2.4. Circulation d'un vecteur

• On considère dans une région de l'espace :

- un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$
- une courbe orientée C (courbe joignant 2 pts A et B)



• On appelle **circulation** du vecteur $\vec{V}$ le long de la courbe C :

$$\Gamma = \int_A^B \vec{V}.d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{V}.d\ell.d\vec{u}$$

$\boldsymbol{u}(M)$ = vecteur unitaire de la tangente orientée à la courbe au pt M.

• Exemple : le travail d'une force :

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{\ell}$$

• Cas particulier : circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé

→ elle se note : $\oint_C \vec{V}.d\vec{\ell}$

→ le sens positif de circulation est le sens trigonométrique

2.5. Flux d'un champ de vecteur

2.5.1. Orientation d'une surface

→ le vecteur est un scalaire orienté :

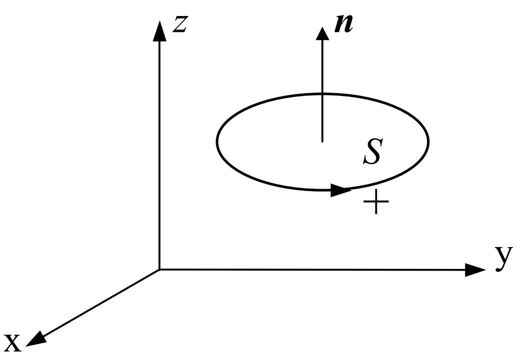
un segment de droite → **scalaire**; si on l'oriente → **vecteur**

une surface → **scalaire**; si on l'oriente → **vecteur**

→ Orientation d'une surface S

→ dir. perpendiculaire à sa surface.

→ vecteur normal unitaire ***n***



→ Convention de signe

→ Si la surface n'est pas plane → découpage de la surface → $d\vec{S}$

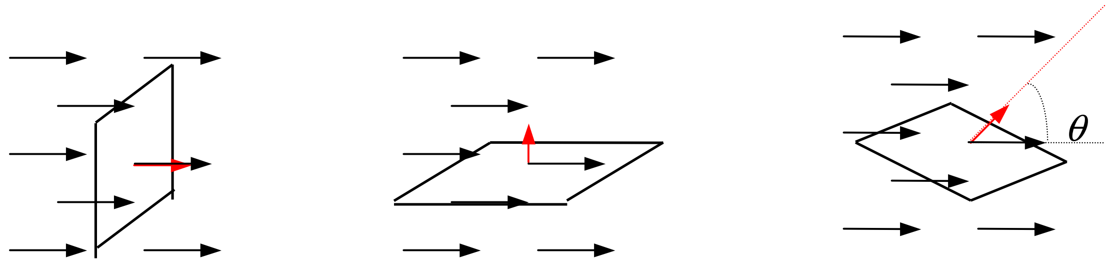
2.5.2. Flux d'un vecteur

flux élémentaire à travers dS : $\boxed{d\Phi = \vec{V} . d\vec{S}}$

flux total à travers S sera : $\Phi = \int_S d\Phi \int_S \vec{V} . d\vec{S}$

Cas particulier : surface fermée : $\oiint_S \vec{V} . d\vec{S}$

• **<u>Exemple 1</u>** : champ homogène de vecteurs $\vec{V}$ et surface plane

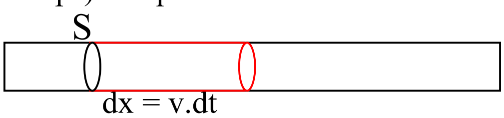


$\phi = V.S$ $\phi = 0$ $\phi = V.S.\cos\theta$

• **<u>Exemple 2</u>** : **Interprétation du flux**

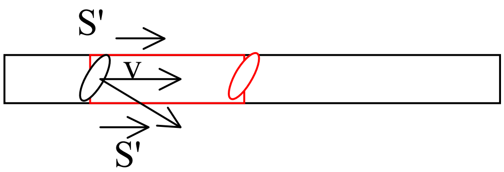
Un fluide est en mouvement dans un tuyau de rayon *R*.

a) En supposant que toutes les particules ont une vitesse v constante, dirigée suivant l'axe du tuyau, montrer que le débit volumique du tuyau D (quantité d'eau qui s'écoule par unité de temps) et équivalent au calcul du flux à travers une section du tuyau.



$$\text{Vol.} = S.vdt \;\rightarrow\; D = \text{Vol.}/dt = S.v = \text{flux}$$

Si S non _|_ à v :

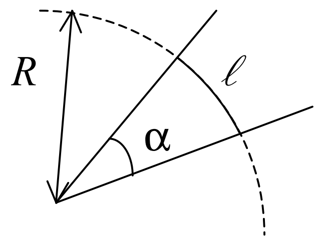


$$D = \Phi = D = \Phi = \vec{v}.\vec{S}' = v.S'.\cos(\theta) = v.S \;\Rightarrow\; S = S'\cos(\theta)$$

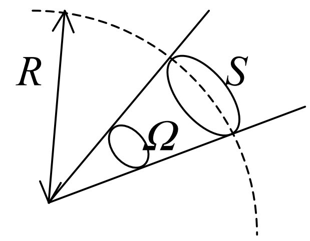
b) Si le module de **v** varie (pas la direction) montrer que le débit volumique est équivalent au flux du vecteur v à travers une section du tuyau. Calculer ce débit si $v = a(R^2 - r^2)$ où *a* désigne une constante et *r* la distance à l'axe du tuyau.

2.6. Angle solide

• <u>Signification de l'angle solide</u> :



cercle



sphère

angle $\alpha = \ell / R$

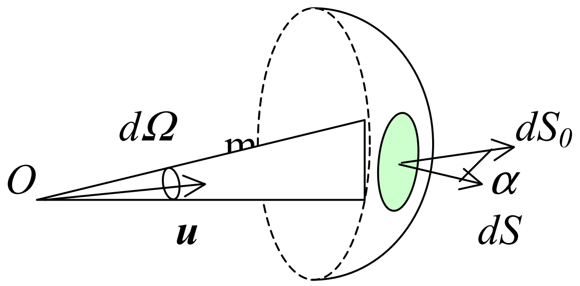
angle solide : $\Omega = S / R^2$

• angle solide élémentaire :

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}.\vec{u}}{r^2}$$



$\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par ***OM***

REM : $d\Omega$ = le flux élémentaire du vecteur $\dfrac{\vec{u}}{r^2}$

- angle solide total à travers une surface S s'appuyant sur un contour C

$$\Omega = \int_S d\Omega = \int_S \frac{d\vec{S}.\vec{u}}{r^2}$$

• <u>Propriété importante de l'angle solide</u> :

L'angle solide ne dépend que du contour C sur lequel s'appuie la surface S

3. Distribution de charges

• Distribution volumique de charges :

C'est une fonction scalaire ρ (densité de charge)
Sa dimension : *charge / volume*
Deux cas de figure :

→ Distribution homogène : charge Q dans un vol. V $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\rho = Q / V}$

→ Distribution non-homogène → fonction de la position : $\rho\,(M)$

et $\rho\,(M) = dq / dV$ avec dV = volume contenant M.
et dq = charge dans dV
et M a pour coord. : (x, y, z)

$\Rightarrow$ La charge totale Q dans V est alors :

$$\boxed{\boldsymbol{Q = \int_V \rho(M).\, dV}}$$

• Distribution surfacique de charges → $\sigma\,(M)$

Charges concentrées sur une surface S → $\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma\,(M).\, dS}$

$\sigma\,(M)$ = densité surfacique de charge

• Distribution linéique de charges → $\lambda\,(M)$.

Charges concentrées sur une courbe C → $\boldsymbol{Q = \int_C \lambda\,(x).\, dx}$

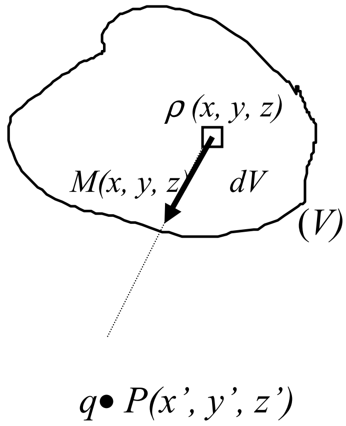
$\lambda\,(M)$ = densité linéiqueique de charges

→ Intérêt :

l'interaction entre :

- une charge *dq* contenue dans *dV* centré en *M*
- et une charge *q* placée en *P* (x', y', z')

s'écrit : $$\boxed{d\vec{F}_{M\to P} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q.(\rho dV)}{MP^2}\vec{u}_{MP}}$$



En vertu du principe de superposition, l'interaction entre :

- le volume *V* tout entier
- et la charge *q* placée en *P*

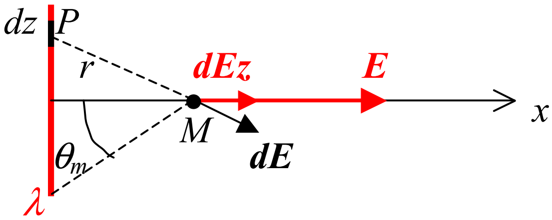
s'écrit : $$\boxed{\Rightarrow \quad d\vec{F}_{V\to M} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho dV}{MP^2}\vec{u}_{PM}}$$

RESUME

Distribution	**Charge totale**	**Champ électrique créé par la distribution de charges**
Distribution volumique discrètes (n charges)	$Q = \sum_{i=1}^{i=n} q_i$	$\vec{E}(M) = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{P_i M}{P_i M^3}$
Distribution volumique continue (ρ (x, y, z))	$Q = \iiint_V \rho(x,y,z).dx.dy.dz$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(x,y,z).dx.dy.dz.PM}{PM^3}$
Distribution surfacique continue (σ (x, y))	$Q = \iint_S \sigma(x,y).dx.dy$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(x,y).dx.dy.\overrightarrow{PM}}{PM^3}$
Distribution linéique continue (λ (x))	$Q = \int_L \lambda(x).dx$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(x).dx.\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

4. Exemples de calculs de champ électrique

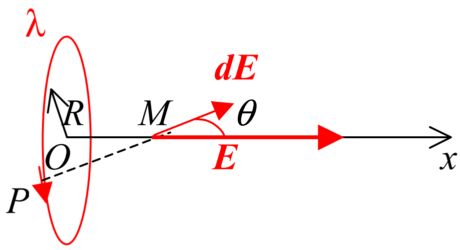
4.1. Segment uniformément chargé



4.2. Cercle uniformément chargé

$$\| d\vec{E} \| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda . d\ell}{r^2}$$

$$dE_x = dE.\cos\theta$$



$$d\ell = R d\alpha \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \qquad et \qquad r^2 = x^2 + R^2$$

$$E = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \oint_C d\alpha$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \vec{i}}$$

5. Propriétés du champ électrique

5.1. Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrique

• Soit un champ électrostatique ***E*** et 2 pts de l'espace P_1 et P_2

> La circulation du champ $\vec{E}$ de P_1 à P_2 est indépendante du chemin choisi pour relier les 2 points :
> $$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{\ell} = cste$$

• Démonstration :

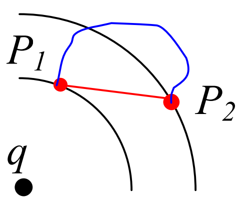
Champ ***E*** créé par une charge ponctuelle q

→ système de coordonnées sphériques

→ ***E*** ne dépend que de r : $\boldsymbol{E}\left|\begin{array}{l} E_r \neq 0 \\ E_\theta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{array}\right.$ et $d\ell \left|\begin{array}{l} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{array}\right.$

→ Circulation de ***E*** :

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{P_1}^{P_2} E.dr \quad \Rightarrow \quad \text{indépendant du chemin.}$$



→ + Principe de superposition

⇒ vrai pour tous les systèmes de charges

5.2. Flux du champ électrique : Théorème de Gauss

Calcul du flux du champ créé par une charge ponctuelle à travers S fermée :

• d'abord flux élémentaire de ***E*** à travers un élément de surface ***dS***

$$d\Phi = \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{u}d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

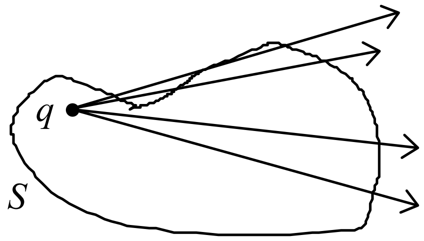
• puis, calcul du flux à travers toute la surface fermée S :

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega$$

2 cas sont envisageables :

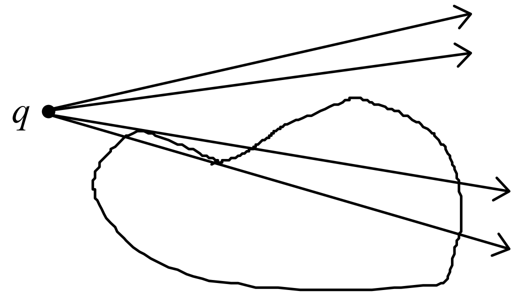
a) flux de ***E*** à travers une surface fermée **<u>entourant</u>** la charge q :

$$d\Omega = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



b) flux de ***E*** à travers une surface fermée **<u>n'entourant pas</u>** la charge q

$$d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0$$



5.3. - THEOREME DE GAUSS

Le principe de superposition permet de généraliser ce résultat à une distribution quelconque de charges :

Le flux du champ électrique ***E*** à travers une surface fermée **quelconque** vaut $1/\varepsilon_0$ fois la charge contenue dans la surface :

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$ou \quad \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_C \lambda.d\ell$$

$$ou \quad \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_S \sigma.dS$$

$$ou \quad \oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho.dV$$

Nous disposons de trois méthodes pour calculer le champ électrique créé par une distribution de charges :

a) calcul de l'intégrale vectorielle : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_V \frac{\rho.dV}{r^2}\vec{u}$

b) calcul du potentiel *V* puis de son gradient : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\iiint_V \frac{\rho.dV}{r}$

et $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

c) calcul par le théorème de Gauss :

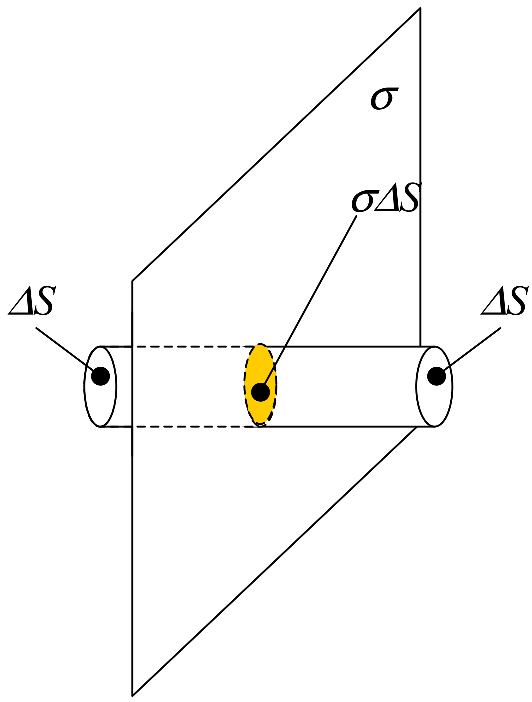
- quand la symétrie du problème le permet
- méthode la plus simple

5.4. Exemples de calculs du champ par le Th. de Gauss

5.4.1. Plan uniformément chargé

On considère :

- un plan *infini* portant la charge σ
- un point M situé hors du plan



Direction du champ en M ?

└→ symétrie du problème

Module E du champ $\boldsymbol{E}$?

└→ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :

- un cylindre de section ΔS d'axe _|_ au plan

$$\Phi = \oint_S \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\Phi = \int_{\Delta S} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{S_{\ell at}} \vec{E}.d\vec{S} + \int_{\Delta S} \vec{E}.d\vec{S}$$

$$\Phi = E.\Delta S + 0 + E.\Delta S$$

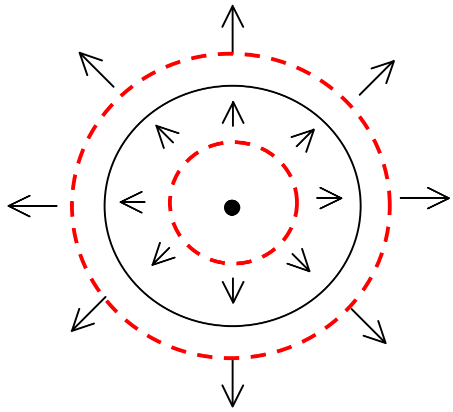
$$\Phi = 2E.\Delta S$$

5.4.2.Sphère uniformément chargée en surface

On considère :

une sphère de rayon R portant en surface la densité de charges $\sigma = cste$

- un point M quelconque de l'espace.



Direction du champ en M ?

→ symétrie du problème

Module E du champ $\boldsymbol{E}$?

→ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :

→ une sphère de rayon r et de centre O.

2 cas se présentent :

- $r < R$:

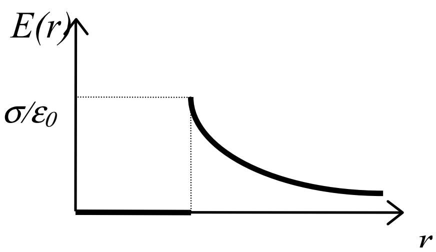
Théorème de Gauss → $E.4\pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$

le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère

- $r > R$:

Théorème de Gauss → $E.4\pi r^2 = \sigma.\ 4\pi R^2 / \varepsilon_0 \Rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Représentation graphique :

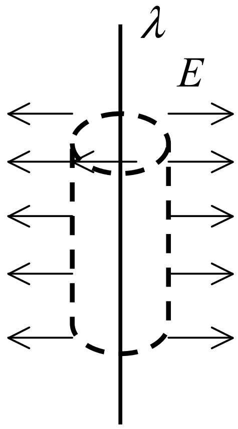


Le problème ne permet pas de définir $\vec{\boldsymbol{E}}$ pour $r = R$

5.4.3.Ligne uniformément chargée

On considère :

- une droite chargée $\lambda =$cste coïncidant avec l'axe Oz par e xemple.
- un point M quelconque de l'espace.



Direction du champ en M ?

$\longrightarrow$ symétrie du problème

Module E du champ $\boldsymbol{E}$?

$\longrightarrow$ Théorème de Gauss

Il faut déterminer la surface de Gauss :

$\rightarrow$ un cylindre fermé de rayon r,
d'axe Oz
et de hauteur h .

Théorème de Gauss :

$\rightarrow$ le flux de $\boldsymbol{E}$ à travers les 2 surfaces extrêmes est nul.

$$\Rightarrow \qquad E.2\pi r h = \lambda h / \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_\rho$$

calcul du potentiel.

6. Travaux dirigés

1. Intégrales de fonction :

a) Calculer l'intégrale volumique de la fonction $f(r,\theta,z) = A/r$ sur un cylindre de longueur ℓ et de rayon R et d'axe Oz., A étant une constante quelconque.

b) Calculer l'intégrale surfacique de la fonction $h\ (r,\theta,z) = A(1+\cos(\theta))$ sur la surface latérale du cylindre précédent, θ étant la deuxième coordonnée cylndrique;

c) Calculer les intégrales de volumique et de surface de la fonction $f(r,\theta,\varphi) = A/r$ sur une sphère de rayon R, A étant une constante quelconque.

2. Champ et flux : Un champ de vecteur $\boldsymbol{E}$ dérive d'un potentiel V présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz. Dans tout plan contenant l'axe Oz, on utilise le système de coordonnées polaires ($\rho = OM$ et $\theta = \widehat{Oz\ OM}$). Dans ce système de coordonnées V a pour expression :

$$V = k\,(3\cos^2\theta - 1)/\rho^3$$

a) Déterminez les composantes du champ électrique $\boldsymbol{E}$.

b) Calculez le flux de ce champ à travers une calotte sphérique centrée en O, de révolution autour de Oz, et dont le rayon est « vu » du centre O sous l'angle 2α.

3. Disque uniformément chargé : Un disque de centre O et de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ.

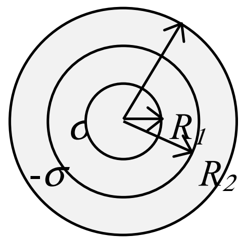
a) Retrouvez l'expression du champ électrique en un point $M(x)$ de l'axe Ox du disque en fonction de x

b) Calculez le potentiel au point M de deux manières différentes.

c) Le champ est-il continu à la traversée du disque ?

d) Le potentiel est-il continu à la traversée du disque ?

4. Sphères concentriques : On considère un système de trois sphères concentriques de centre O, de rayons R_1 , R_2 ,R_3 tels que $R_1 < R_2 < R_3$ .La sphère de rayon R_1 porte une densité surfacique de charge $\sigma>0$, celle de rayon R_2 une densité surfacique de charge $-\sigma$ et celle de rayon R_3 une densité surfacique de charge σ.



a) Calculez le champ électrique $\boldsymbol{E}\ (r)$ en tout point de l'espace. Utilisez le théorème de Gauss et considérez les quatre cas :

- $r < R_1$
- $R_1 < r < R_2$
- $R_2 < r < R_3$
- $r > R_3$

b) Calculez le potentiel électrique $V\ (r)$ dans les quatre cas. Vous calculerez le potentiel au point O pour déterminer la première constante d'intégration et une propriété du potentiel pour calculer les autres constantes d'intégration.

c) Evaluez l'allure des variations de $\boldsymbol{E}$ et V en fonction de r.

d) Ce système est-il assimilable à un dipôle ? Pourquoi ?

5. Cylindre uniformément chargé : Un cylindre de rayon R et de longueur L très grande referme une charge dont la densité volumique est constante et vaut ρ. Calculer le champ électrique dans l'espace en considérant les extrémités du cylindre à l'infini.

6. Modèle atomique : On représente d'une manière approchée le cortège électronique d'un atome par une distribution de la forme :

$$\rho(r) = A/r^n \quad \text{dans le domaine } a < r < \infty$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{dans le domaine } r < a$$

$\rho(r)$ étant la densité volumique de charge à la distance r du centre de l'atome et n, a et A des constantes.

Au centre de cet atome se trouve le noyau considéré comme une charge ponctuelle de charge Ze (Z est le nombre atomique et e la charge de l'électron en valeur absolue).

a) Calculez la charge Q_e du cortège électronique et montrez que n doit être supérieure à une valeur n_0 si l'on impose à Q_e d'avoir une valeur finie.

b) En exprimant que la charge totale de l'atome est nulle, déterminez la constante A.

c) Calculez le champ électrique $\boldsymbol{E}(r)$ en un point du cortège électronique situé à une distance r ($r > a$) du centre.

d) Calculez le potentiel électrique $V(r)$ en un point du cortège électronique situé à une distance r ($r > a$) du centre (on supposera $V = 0$ à l'infini).

e) Cet atome est-il assimilable à un dipôle électrostatique ? Pourquoi ?