MAGNESTOTATIQUE - 2

1. Le courant électrique

• Définitions :

• courant électrique = tt mvt d'ensemble de particules chargées

• l'intensité du courant électrique à travers une surface est le débit de charges à travers cette surface:

$$I = dQ / dt$$

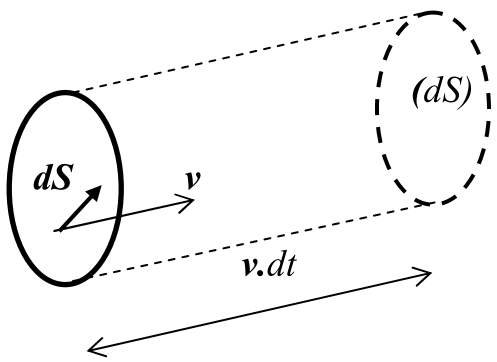
• Le déplacement des porteurs de charges se fait dans un milieu à 3 dimensions $\rightarrow$ concept de **densité de courant**

• Vecteur densité de courant:

on considère : - ρ, la densité de charges par unité de volume
- ***v***, la de vitesse moyenne des charges

et
- ***dS,*** une surface orientée
- *dt* un intervalle de temps quelconque

$\rightarrow$ la quantité de charges ΔQ qui traverse ***dS*** pendant *dt* est équivalente à la charge enfermée dans le volume fictif:



$$dV = \mathbf{dS}.\boldsymbol{v}.dt$$

soit :

$$dQ = \rho.dV \quad \Rightarrow \quad dQ = \rho.(d\vec{S}.\vec{v}).dt$$

$$\Rightarrow \quad dQ / dt = \rho.\vec{v}.d\vec{S}$$

on introduit le vecteur **densité de courant**: $\vec{J} = \rho.\vec{v}$

on obtient : $\dfrac{dQ}{dt} = \vec{J}.d\vec{S}$ = le flux de ***J*** à travers ***dS***

• L'intensité I d'un courant dans un conducteur de section S est le flux de ***J*** à travers S.

$$I = \iint_S \vec{J}.d\vec{S}$$

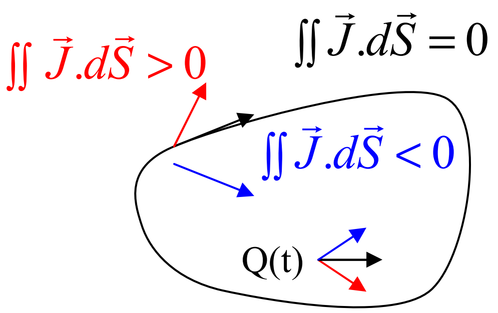
REM : - s'il y a plusieurs types de charges mobiles : $\vec{J} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$

• Equation de continuité

<u>Dans le cas général</u>, si l'on considère un volume V délimité par une surface S, on a:

$$\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Le flux de ***J*** représente la quantité de charges qui entre ou sort du volume



• Courants permanents

Régime permanent ou stationnaire $\rightarrow$ pas de dépendance au temps

$$\Rightarrow \quad \oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = 0$$

"en régime permanent *J* est à flux conservatif"

REMARQUES :

1/ $\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = 0$ n'entraîne pas $\boldsymbol{v} =$ cste ou $\rho =$ cste !

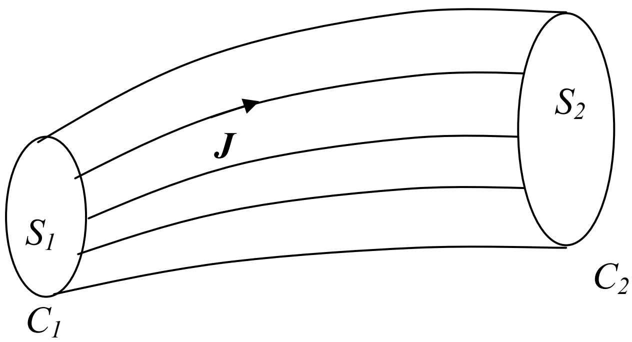
• Ligne et tube de courant

- une **ligne de courant** est telle qu'elle est tangente en tout point à ***J***
REM : en rég. permanent ces lignes ≡ la trajectoire des charges

- un **tube de courant** est la surface engendrée par des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

PROPRIETE : *en rég. permanent, l'intensité du courant est la même à travers tte section d'un tube de courant car **J** est à flux conservatif:*

$$\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = 0$$
$$\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{J}.d\vec{S} + \oiint_{S2} \vec{J}.d\vec{S}$$
$$\oiint_S \vec{J}.d\vec{S} = -I_1 + I_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad I_1 = I_2$$



• Tube de courant élémentaire

- un **tube élémentaire de courant** est un tube s'appuyant sur une surface élémentaire *dS*. On a alors :

$$dI = \mathbf{J}.\mathbf{dS}$$

D'un point de vue pratique,

on a vu : source électrostatique $\rightarrow$ $\rho.dV$

on verra : source magnétostatique $\rightarrow$ $\mathbf{J}.dV$

On sera donc souvent amené à considérer la quantité $\mathbf{J}.dV$.
Soit ***s*** la section d'un tube de courant $\rightarrow$ $dV = \vec{s}.d\vec{\ell}$ $\rightarrow$ $\vec{J}.dV = \vec{J}.\vec{s}.d\vec{\ell}$

$$\rightarrow \quad \vec{J}.dV = I.d\vec{\ell}$$

2. Champ magnétique

2.1. charge unique en mouvement

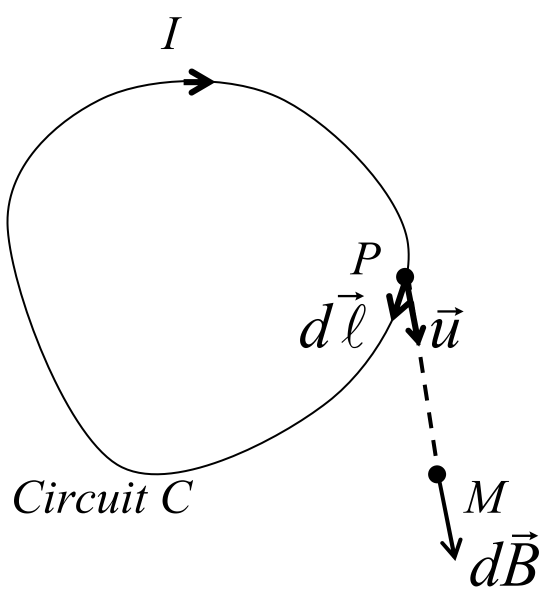
champ créé par une charge en mouvement

$\rightarrow$ pas de régime permanent

On peut admettre :
le champ magnétique créé au point M par une charge placée en P est :

$$\boxed{\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4.\pi} \frac{q\vec{v} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

2.2. Circuit filiforme : Postulat de Biot et Savard



- champ élémentaire créé par $Id\vec{\ell}$:

$$d\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4.\pi} . \frac{Id\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

- champ total :

$$\boxed{\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4.\pi} \oint_{(c)} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

avec : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I.

2.3. distribution volumique de courants

correspondance:

circuit filiforme	*tube de courant*
$I d\vec{\ell}$	$\vec{J}.dV$
intégrale curviligne	intégrale de volume

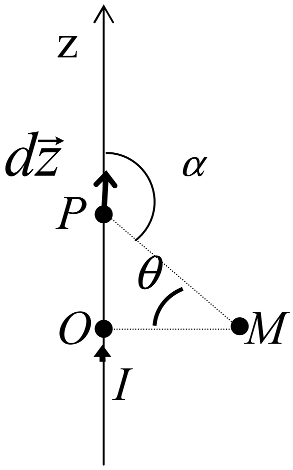
$$\oint_C I.d\ell \quad \rightarrow \quad \iiint_V \vec{J}.dV$$

B&S $\rightarrow$ $$\boxed{\vec{B}_M = \frac{\mu_0}{4.\pi}\iiint \frac{\vec{J}\wedge\vec{u}}{r^2}\,dV}$$

avec $\boldsymbol{PM} = r.\,\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{J}$ la densité de courant au point P

3. Exemples de calculs du champ magnétique

3.1. Champ créé par un fil infini



1- direction et sens de ***B*** ?

$\rightarrow$ $\perp$ au plan
et vers l'arrière

2- module :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4.\pi} \cdot \frac{d\vec{z} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

(= cosθ)

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4.\pi} \cdot \frac{dz \cdot \sin\alpha}{PM^2}$$

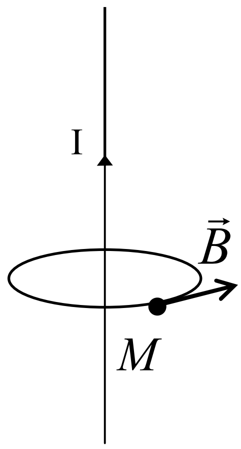
on préfère utiliser l'angle θ : cosθ = sinα
on peut alors écrire :

$$OM = D \quad \Big| \quad PM = \frac{D}{\cos\theta} \quad \Big| \quad OP = z = D.tg\theta \Rightarrow dz = \frac{D}{\cos^2\theta} d\theta$$

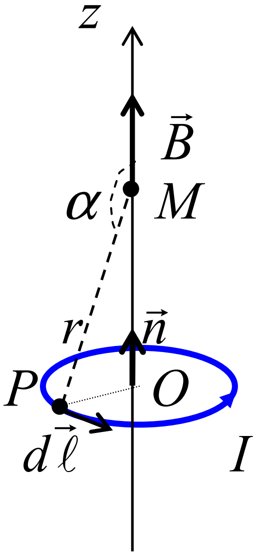
On en déduit :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$\boxed{B = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dB = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot \pi \cdot D}}$$



3.2. Champ magnétique créé par une spire



Calcul possible en 1 point de l'axe seulement :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4 \cdot \pi} \oint_{(c)} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4 \cdot \pi \cdot r^3} \oint_{(c)} d\vec{\ell} \wedge \vec{r}$$

<u>REM</u> : $r = \|\vec{r}\,\|$ est constant lors de l'intégration mais pas $\vec{r}$

De plus : $\vec{r} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}$

- $\oint_{(c)} d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{OM} = \left(\oint_{(c)} d\vec{\ell}\right) \wedge \overrightarrow{OM} = 0$
- $d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PO} = R.d\ell.\vec{n}$

$\Rightarrow \quad \oint_C d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PO} = R.(\oint_C d\ell) \wedge \vec{n} = 2 \cdot \pi \cdot R^2\, \vec{n}$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 \cdot r^3}}$$

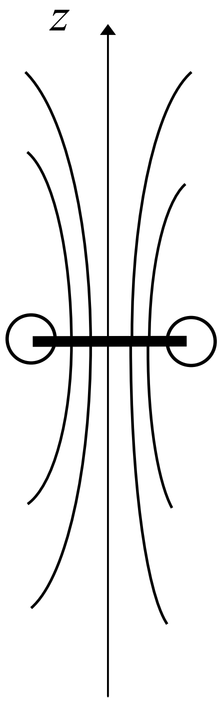
ou encore en notant que : $R = r\,sin\alpha$:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \cdot R} \sin^3(\alpha)}$$

REMARQUES :

- au centre de la spire on a : $\boxed{\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2 \cdot R}}$

- hors de l'axe $\rightarrow$ calcul plus complexe $\rightarrow$ spectre magnétique

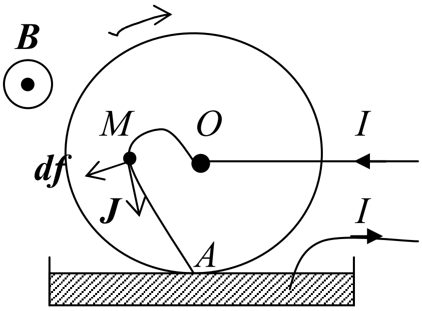


Lignes de champ hors de l'axe.

Au voisinage de l'anneau les lignes de champ sont des cercles.

3.3. Roue de Barlow

C'est le plus simple des moteurs électriques



On considère :
- un champ magn. $\vec{B}$ $\perp$ au plan de la feuille
- un disque conducteur, libre de tourner autour d'un axe passant par O et // à $\vec{B}$
- un courant d'intensité I qui le traverse de son centre O en un point A qui affleure un bain de mercure

Un élément de volume dτ au point M est soumis à la force :

$$\mathbf{d\vec{F} = (\vec{J} \wedge \vec{B})\, d\tau}$$

qui tend à faire tourner le disque. Le moment de cette force s'écrit (avec r = OM):

$$\mathbf{d\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge d\vec{F} = \vec{r} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{B})\, d\tau}$$

$$\mathbf{d\vec{\Gamma}} = \underbrace{\mathbf{(\vec{r}\cdot\vec{B})\cdot\vec{J}d\tau}}_{=0 \text{ car } \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{B}} - \underbrace{\mathbf{(\vec{r}\cdot\vec{J})\cdot\vec{B}\, d\tau}}_{\text{donne la dir. de } \vec{\Gamma}\text{, // à } \vec{\boldsymbol{B}}}$$

considérons dτ comme une portion d'un tube élémentaire de courant, dans ce cas:

$$\mathbf{\vec{J}\cdot d\tau = dI \cdot d\vec{\ell}}$$

et en sommant sur tout le disque on obtient :

$$\Gamma = \vec{B}.\iint_{roue} dI.\int_0^R (\vec{r}\cdot d\vec{\ell}) \qquad et \int_0^R (\vec{r}\cdot d\vec{\ell}) = \int_0^R (r\cdot dr) = \tfrac{1}{2}R^2$$

$$\iint_{roue} dI = I$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{B}\cdot\frac{R^2}{2}I}$$

REMARQUE : on obtient le même résultat en considérant que tout le courant suit le trajet OA , $f = IRB$ cette force étant appliquée au milieu de OA.

3.4. Champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde

3.5. Définition de l'ampère (Lyonnais, 1775-1836)

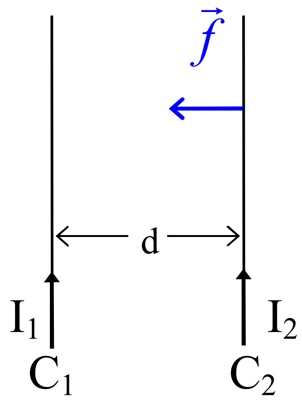
elle est basée sur l'interaction entre 2 fils conducteurs rectilignes et parallèles :

1- le fil C_1 crée en tout point de C_2 un champ magnétique perpendiculaire au plan des 2 fils et de module :

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

2- une portion ℓ du fil C_2 subit une force $\vec{f}$ dans le plan des 2 fils : $f = B I_2 l$, c'est-à-dire :

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} . \frac{I_1 I_2}{d} . \ell$$



• DEFINITION :

l'ampère est l'intensité d'un courant permanent qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, parallèle, infinis, de section négligeable et distants de 1 mètre dans le vide, produit entre eux une force par unité de longueur de :

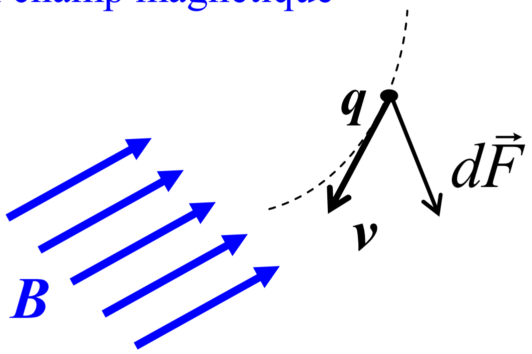
2.10^{-7} N/mètre de fil

4. Forces magnétiques

• particule chargée en mvt dans un champ magnétique

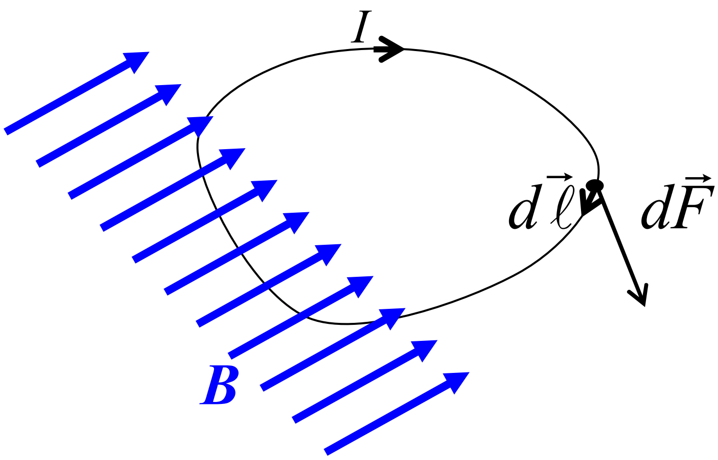
$$\boxed{\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

(particule en mvt, Effet Hall)

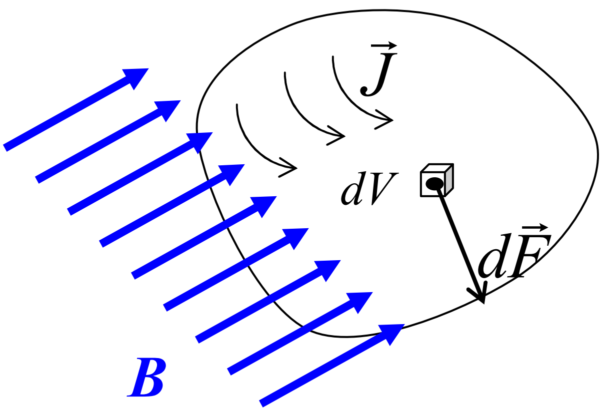


• circuit filiforme dans un champ magnétique

$$\boxed{\vec{F} = \oint_C I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}}$$



• courants volumiques dans un champ magnétique

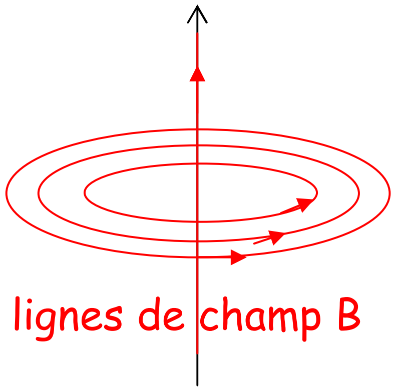


$$\boxed{\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \wedge \vec{B}.dV}$$

5. Propriétés du champ magnétique

5.1. Circulation du champ magnétique

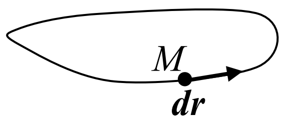
⟶ **fil rectiligne infini** → Système de coordonnées cylindriques :



- Un courant filiforme infini porté par *Oz*

- composantes de ***B*** $\vec{B}:(0,\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho},0)$

+



- 1 contour C et 1 point *M* du contour : M (ρ, θ, z)

- le déplacement ***dr*** sur *C* : ($d\rho$, $\rho d\theta$, dz)

⇒ circulation de ***B*** sur *C* : $$\boxed{\Gamma=\oint_{(c)}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_{(c)}d\theta}$$

Deux cas se présentent :

(C) entoure le fil $\oint_C d\theta=2\pi \quad \Rightarrow \quad \Gamma=\mu_0 I$

(C) n'entoure pas le fil : $\oint_C d\theta=0 \quad \Rightarrow \Gamma=0$

spire circulaire : Circulation de ***B*** le long de l'axe de la spire:

$$\Gamma=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\sin^3\alpha\cdot dz \quad avec \quad dz=-R\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\Gamma=\frac{\mu_0 I}{2}\int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha \quad \Rightarrow \quad \Gamma=\mu_0 I$$

5.2. Théorème d'Ampère

• C'est une généralisation des deux exemples précédents

• Il s'énonce de la manière suivante :

« **La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé *C* égale à la somme des intensités algébriques des courants qui traversent toute surface s'appuyant sur *C* multipliée par μ_0 ».**

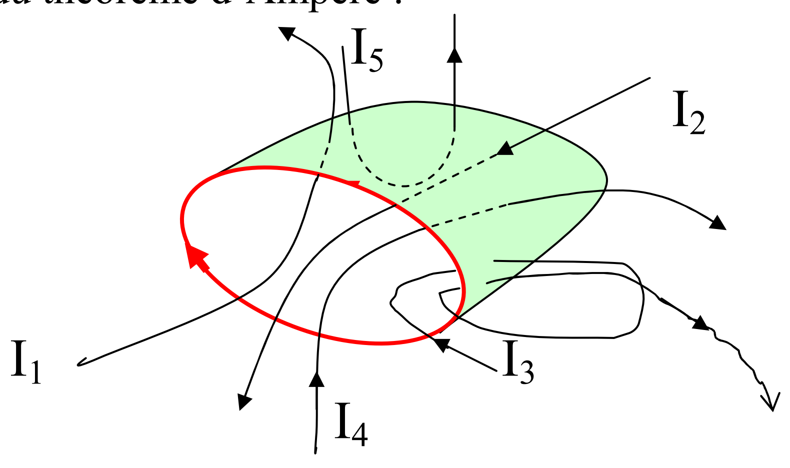
$$\boxed{\Gamma_{(c)}(\vec{B}) = \oint_{(c)} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i}$$

• Le théorème d'Ampère exprime une relation entre le champ magnétique et ses sources (équivalent du théorème de Gauss en électrostatique).

• la circulation de ***B*** n'est pas conservative

$\Rightarrow$ ***B*** ne dérive pas d'un pot. scalaire(contrairement à ***E***)

• Illustration du théorème d'Ampère :



$$\oint_C \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0[I_1 - I_2 + 2I_3 + I_4 - I_5 + I_5]$$

5.3. Flux du champ magnétique

⟶ **Postulat du flux conservatif** :

le flux de B à travers une surface fermée quelconque, est nul:

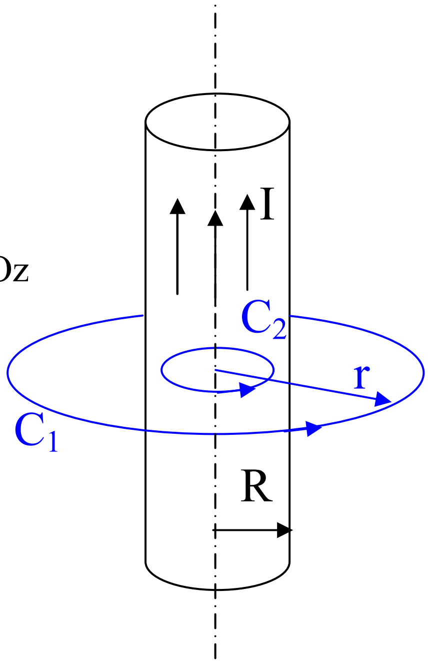
$$\Phi_S(\vec{B}) = \oiint_{(S)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

Provient du fait que les lignes de champ magnétique sont fermées

5.4. Exemples d'application du théorème d'ampère

- fil infini → déjà vu
- cylindre :

$$\boxed{\oint_{(c)} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_i I_{\text{intérieur}}}$$



B orthoradial ⇒ contour = cercle centré sur Oz
contour C_1 de surface S_1
contour C_2 de surface S_2

qqs le contour → $\oint_{(c)} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B.2\pi r$

2 cas se présentent :

• r > R → $\sum I_{\text{intérieur}} = \iint_{S_1} \vec{J}.d\vec{S} = I$

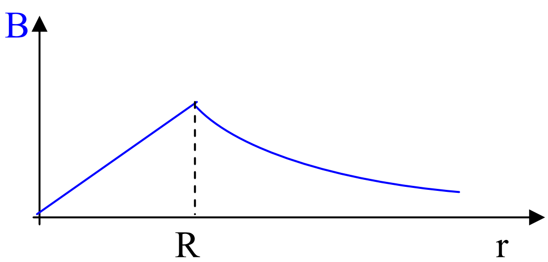
→ $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}}$

• r < R → $I_{\text{intérieur}} = \iint_{S_2} \vec{J}.d\vec{S}$

→ J = ? → $J = I/\pi R^2$

→ $I_{\text{intérieur}} = I.\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}$

→ $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}}$



6. Travaux dirigés

1. Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme. Une particule de masse m de charge q est lancée à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On adoptera un système de coordonnées tel que le centre O coïncide avec la position initiale de la particule, Oz avec la direction de $\vec{B}$ et on choisira une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan Oyz. Décrire le mouvement de la particule.

2. Champ magnétique créé par un circuit carré. Considérez un circuit carré de côté a, parcouru par un courant I et calculez le champ magnétique en son centre.

3. Bobines d'Helmoltz. Deux bobines de N spires, de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I , ont leurs centres distants de R. Le sens du courant est tel que les champs créés par les deux spires s'ajoutent dans l'espace situé entre les deux spires :

a) Calculez $\boldsymbol{B}$ au milieu O de l'axe joignant les deux centres.

b) Calculez $\boldsymbol{B}$ pour un point M de l'axe voisin de O repéré par $OM = x$
Quelle est la variation relative de $\boldsymbol{B}$ entre O et M pour $x/R = 0.1$?

4. Action d'un champ magnétique uniforme sur une spire

On considère une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité I , mobile autour d'un de ses diamètres et placée dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ de direction quelconque dans un repère $Oxyz$. (On placera la spire dans le plan Oxy, son centre correspondant avec l'origine O du repère).

a) Calculer la force nette qui agit sur cette spire
b) Calculer le moment de cette force
c) Ecrire ce moment sous la forme : $\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}$, $\vec{M}$ étant un vecteur à déterminer, appelé **moment magnétique.**

5. Théorème d'Ampère : conducteur coaxial. On considère un câble coaxial infini cylindrique de rayons R_1, R_2, R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$). Le courant d'intensité totale I passe dans un sens dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.

Calculez $\boldsymbol{B}$ en tout point et représentez graphiquement $\boldsymbol{B}(r)$, r étant la distance du point considéré à l'axe du cylindre.

Voir aussi (pour l'an prochain) la Pierre Savard p. 123 (exo fait en examen mais avec une spire carrée).