DECOMPOSITION EN SERIE DE FOURIER D'UN SIGNAL RECTANGULAIRE

1.BUT DE LA MANIPULATION

On cherche dans cette manipulation, à montrer qu'un signal non sinusoïdal peut être décomposé en série de Fourier. En se plaçant dans le cas particulier d'un signal rectangulaire périodique, on va effectuer son analyse en fréquence c'est-à-dire que l'on va faire apparaître les premiers harmoniques le composant. Ces harmoniques seront caractérisés par leur amplitude et leur fréquence que l'on comparera aux valeurs théoriques.

Afin d'effectuer cette décomposition en série de Fourier du signal rectangulaire, on utilisera un circuit sélectif. Celui-ci sera réalisé à l'aide d'un circuit résonant parallèle, ou circuit bouchon, dont on étudiera la sélectivité.

2.PREPARATION

Revoir les système du second ordre (circuit RLC parallèle).

Revoir les relations générales entre valeurs moyenne, efficace et crête d'un signal périodique et, en particulier, celles relatives au signal rectangulaire.

3.DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER

Une fonction périodique f (t), de période T, peut être considérée comme la superposition d'un signal continu et d'une infinité de signaux sinusoïdaux.

On montre, en effet., que sous certaines conditions, f (t) peut se développer en série de Fourier sous la forme :

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)} \qquad (1)$$

avec

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t).dt = valeur\ moyenne \\ A_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega t.dt \\ B_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\omega t.dt \end{aligned}}$$

t_0 étant une valeur quelconque de t .

L'équation (1) peut également se mettre sous la forme :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

avec $$C_n = \sqrt{A_n^{\,2} + B_n^{\,2}} \quad et \quad \varphi_n = -Arc\,tg\left(\frac{B_n}{A_n}\right)$$

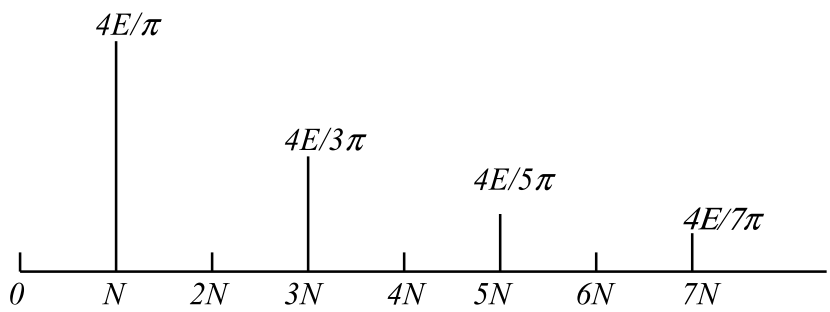
C_n et φ_n étant respectivement l'amplitude et la déphasage de l'harmonique de rang *n*.

4.spectre de fréquence

Les fréquences des différents termes de la série de Fourier, appelés harmoniques, sont multiples d'ordre 1, 2, ... n de la fréquence fondamentale.

En portant en chaque point d'abscisse égale à la fréquence des divers termes, un segment de droite perpendiculaire à l'axe des abscisses de longueur proportionnelle à l'amplitude (ou à la puissance) de l'harmonique considèrè, on obtient le spectre de fréquence de la fonction.

Ainsi le spectre de fréquence d'un signal rectangulaire d'amplitude *E* sera de la forme :

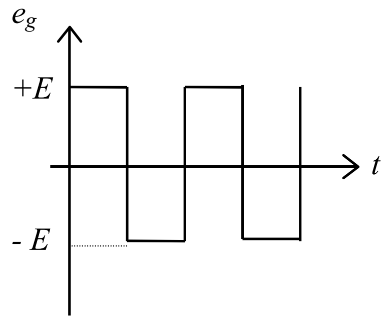


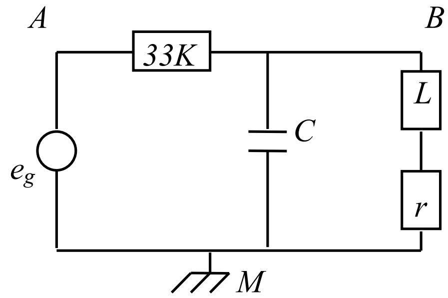
5. Utilisation du circuit RLC parallèle dans l'analyse en fréquence

L'analyse en fréquence d'un signal périodique non sinuosïdal a pour but de le décomposer en série de Fourier afin de déterminer la fréquence et l'amplitude du fondamental et des harmoniques.

Un signal périodique non sinusoïdal ne donnera, à la sortie du circuit résonant, un maximum de tension que si le fondamental, ou un harmonique, a pour fréquence la fréquence de résonance du circuit. Le circuit résonant, ou circuit sélectif, isole donc cette composante que l'on peut ensuite caractériser par son amplitude et sa fréquence.

Le principe de la manipulation est donc le suivant : on considère le circuit représentatif suivant :





La pulsation d'un tel filtre est donnée par : ω^2 = **Erreur !**

La résistance R de valeur élevée permet de réaliser une attaque en courant du circuit résonant.

Le générateur délivre le signal périodique (rectangulaire, triangulaire... ou quelconque), e (t), que l'on veut analyser en fréquence.

Par exemple, le développement théorique en série de Fourier d'un signal rectangulaire est de la forme :

$$e(t) = \frac{4E}{\pi}\left[\sin\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \ldots + \frac{\sin(2m+1)\omega t}{2m+1} + \ldots\right]$$

On cherche à vérifier expérimentalement cette loi, tant en fréquence qu'en amplitude.

Pour cela, on utilise une capacité C variable : la fréquence de résonance du circuit sélectif est donc ajustable à l'aide de C.

• *Vérification en fréquence.*

Un oscilloscope bicourbe permet de comparer l'allure des signaux entre *AM* et *BM,* de mesurer leur fréquence et leur amplitude. Un voltmètre mesurant la valeur efficace vrai permettra de réaliser des mesures plus précises.

Partant donc, par exemple, d'un signal rectangulaire fixé, d'amplitude E et de fréquence N, visualisé sur la voie Y de l'oscilloscope, on fait varier C jusqu'à obtenir en Y , un signal sinusoïdal de fréquence égale à N. Ce signal, que l'on vient de faire apparaître en Y , est le fondamental et la fréquence N est la fréquence de résonance du filtre pour cette valeur de C (notée C_1).

D'aprés la relation (5), l'harmonique suivant est l'harmonique de rang 3 : $N_3 = 3.N$. Il faut alors chercher la valeur C_3 de C telle que le filtre résone à la fréquence $3N$. On isole ainsi l'harmonique 3 que l'on peut observer sur la voie Y de l'oscilloscope. On ensuite isoler les harmoniques suivantes en faisant varier la capacité du condensateur C.

• *Vérification en amplitude*

Si l'on veut maintenant vérifier la loi en amplitude, il faut comparer les amplitudes du fondamental, puis des harmoniques avec les amplitudes données par la relation (5). Or les signaux obtenus sur la voie *Y* de l'oscilloscope ne sont que les images à travers le filtres des réelles composantes de la série. Il convient de connaitre l'atténuation du filtre pour les différentes valeurs de *C* (rapport V_{BM} / V_{AM}) et de transformer les valeurs efficaces en valeurs crêtes.

6.MANIPULATION

Pour que ce que l'on vient de voir soit valable il faut s'assurer de certaines choses :

- tout d'abord, afin d'effectuer le calcul précédent, il faut connaître les variations, s'il y en a, de *L* et de *r* avec la fréquence.

- ensuite, pour que la mesure de V_{BM} soit significative de l'harmonique étudié, il faut que la sélectivité du circuit considéré soit telle qu'il n'y ait pas chevauchement entre les courbes de résonance en fréquence de chaque harmonique.

La première partie de cette séance est consacrée à l'étude du circuit sélectif et à la vérification de ces conditions.
La deuxième partie concerne la décomposition en série de Fourier.

1ère partie : étude du circuit de résonance

6.1.Variation de la self avec la fréquence

On attaque le circuit de résonance par des signaux sinusoïdaux de 1100 Hz.
a) Ajustez *C* de façon à se trouver à la résonance. Relevez cette valeur C_1 de *C*.

b) Recommencez la mesure aux fréquences 3300, 5500, 7700 Hz.

c) En déduire la valeur de L à chacune de ces fréquences.
Que peut-on en conclure quant à la variation de *L* avec la fréquence ?

6.2. Sélectivité du circuit résonant

Le circuit *RLC* va être utilisé comme filtre sélectif pour isoler les différents harmoniques composnt le signal rectangulaire que l'on veut étudier. Les résultats obtenus ne seront significatifs que si la sélectivité du circuit résonant est suffisante. On va donc tracer les courbes de résonance en fréquence du montage au voisinage des fréquences suposées utiles lors de la décomposition du signal rectangulaire à savoir : 1100 Hz, 3300 Hz, 5500 Hz, 7700 Hz.

On appliquera donc un signal sinusoïdal entre les points *A* et *M* et on relèvera la tension V_{BM} correspondante.

6.2.1. Etude au voisinage de 1100 Hz

Afficher $C = C_1$, valeur de C à la résonance pour $N_1 = 1100$ Hz. Pour N variant au voisinage de cette fréquence relevez les valeurs efficaces de V_{BM} pour une valeur efficace de $V_{AM} \approx 1V$.

En déduire l'atténuation du circuit : $A_V = V_{BM} / V_{AM}$.

b) Recommencez les mêmes mesures, la tension V_{AM} étant maintenue constante, pour $C = C_3$ au voisinage de 3300 Hz, $C = C_5$ au voisinage de 5500 Hz, $C = C_7$ au voisinage de 7700 Hz.

Tracer les quatre courbes de réponse en fréquence $A = f(N)$ sur une même feuille de papier millimétré. Que pouvez vous conclure quant à la sélectivité du circuit vis-à-vis des fréquences voisines (c'est-à-dire de 1100 pour 3300, de 3300 pour 1100 et 5500 etc...).

Nota : *les courbes que l'on vient de tracer sont simplement des courbes de réponse en fréquence d'un circuit passif attaqué par un signal sinusoïdal. Elles n'ont rien à voir avec le spectre en fréquence qui correspond, lui, à une attaque par des signaux rectangulaires.*

2ème partie : Décosposition en série de Fourier d'un signal rectangulaire

Votre montage est **maintenant** attaqué par des signaux rectangulaires (E = 1 Volts) **de fréquence *N = 1100 Hz*.** On vérifiera la bonne symétrie par rapport au niveau 0.

a) Etude du fondamental

Isolez l'harmonique fondamental du signal rectangulaire en choisissant la valeur adequat du condensateur du filtre.

Relevez au voltmètre sa valeur efficace et, en tenant compte de l'atténuation du filtre, déduisez l'amplitude du premier harmonique. Comparez avec la valeur théorique.

b) Harmonique 2

Essayez d'obtenir l'harmonique 2. commentez.

c) Etude des divers harmoniques

Recommencez les même mesures et calculs pour les harmoniques 3, 5, et 7 en tenant compte des valeurs des atténuations respectives mesurées plus haut

Commentaires et conclusion.

d) Spectre en fréquence

A l'aide des résultats obtenus précédement tracez les spectres en fréquence, théorique et expérimental, du signal rectangulaire étudié.

Remarques. Conclusion.