

## PHENOMENES EXPONENTIELS

*Il est toujours intéressant de pouvoir décrire l'évolution d'un phénomène (physique ou biologique) par une loi mathématique (lois affine, quadratique, exponentielle...). La croissance ou la décroissance exponentielle est une évolution fréquemment rencontrée dans la nature (vous donnerez en introduction quelques exemples d'évolutions de ce type). Il est donc utile de savoir caractériser et de se familiariser avec sa forme mathématique. Pour cette séance, nous avons choisi d'étudier la charge et la décharge d'un condensateur car la tension à ses bornes (paramètre simple à mesurer) varie de façon exponentielle.*

### 1. CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR A TRAVERS UNE RESISTANCE

Considérons un circuit série RC alimenté par une tension continue  $E$  (figure 1). Soit  $u(t)$  la tension aux bornes du condensateur. D'après la loi des mailles :

$$E = Ri(t) + u(t)$$

L'intensité dans le circuit et la tension aux bornes du condensateur sont liées à la charge  $q$  de l'armature d'entrée du condensateur par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{dq}{dt} \\ q(t) = Cu(t) \Rightarrow \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u(t) = \frac{E}{RC} \end{array} \right. \quad (1)$$

En notant  $A$  la constante d'intégration la solution générale de cette équation différentielle est :

$$u(t) = E + A \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (2)$$

#### Charge du condensateur

Initialement l'inverseur se trouve dans la position  $b$  et le condensateur est déchargé ( $q = 0$ ,  $u = 0$ ). A l'instant  $t = 0$  on bascule en position  $a$ . Le courant s'établit et la tension aux bornes du condensateur augmente jusqu'à atteindre  $E$ . Donc, d'après les conditions initiales, à  $t = 0$  on a :

$$u(0) = E + A \exp(0) = 0 \Rightarrow A = -E \Rightarrow u(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right) \quad (3)$$

- Régime permanent : cette expression nous montre que la valeur de la tension  $u(t)$  tend vers une valeur limite  $u_L$  lorsque  $t$  tend vers l'infini :  $u_L = E$

- régime transitoire : la durée nécessaire au système pour atteindre le régime permanent est caractérisée par la constante de temps  $\tau = RC$ .

On peut remarquer que pour  $t = \tau$  : 
$$u(\tau) = E (1 - e^{-1}) \quad (4)$$

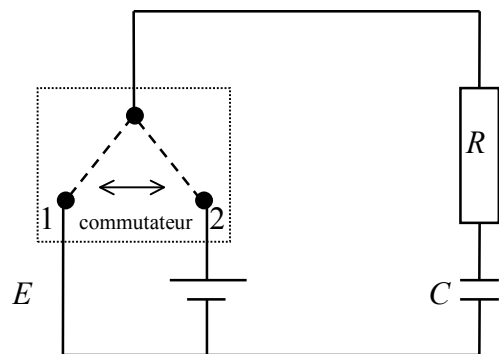


Figure 1 : circuit RC  
(le commutateur est en position 1 ou 2)

## Décharge du condensateur

Le condensateur est maintenant complètement chargé. A l'instant  $t = 0$  on bascule l'interrupteur en position  $b$ . L'équation différentielle (1) devient :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u = 0 \quad (5)$$

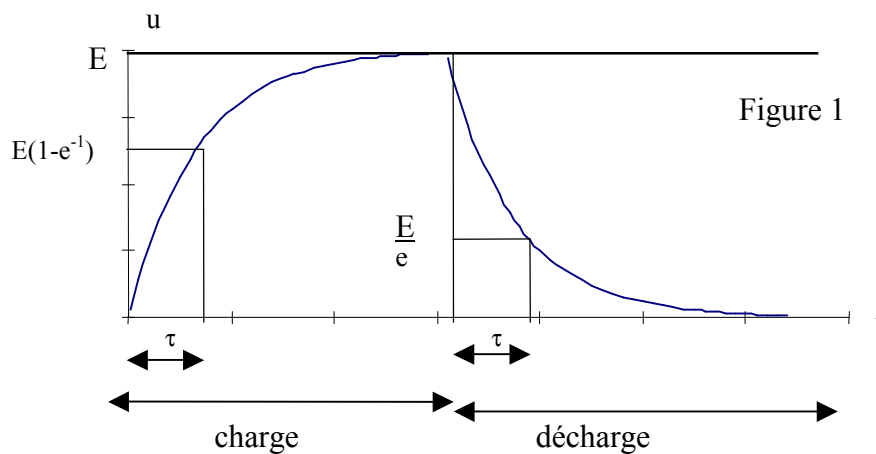
et sa solution générale :

$$u(t) = E \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (6)$$

en considérant qu'à  $t = 0$  le condensateur chargé avait une tension  $u(t=0) = E$ .

- La constante de temps du système est toujours  $\tau = RC$  mais on a maintenant  $u_L = 0$

On obtient pour les deux phases, charge et décharge, les courbes suivantes :



## La table traçante :

### Présentation

L'enregistreur ou table traçante XY permet d'effectuer des enregistrements de tensions. Son fonctionnement est très similaire à celui de l'oscilloscope. Une plume se déplace dans le plan de la table et subit une déviation horizontale, proportionnelle à la tension appliquée sur la voie X, et une déviation verticale proportionnelle à la tension appliquée sur la voie Y (les connexions des deux voies sont au dos de l'appareil).

Comme l'oscilloscope, cet appareil fonctionne également en mode Y(t), c'est-à-dire que l'on peut enregistrer la variation d'une tension en fonction du temps. Dans ce cas, seule la voie Y est utilisée. La base de temps permet le déplacement du bras d'enregistrement selon l'axe des X, à vitesse constante. Le déclenchement du « balayage » est commandé par le bouton *START*. Le choix de la vitesse (donnée en s/cm) est lié à la durée de l'évènement que l'on veut enregistrer.

### Précautions d'utilisation :

La table traçante est un appareil fragile et coûteux. Il convient de la manipuler avec précaution et de respecter impérativement les consignes suivantes :

- ne pas forcer sur les boutons de commande.
- ne jamais gêner le mouvement du bras mobile.
- placer en permanence une feuille sur le plateau d'enregistrement et **ne rien poser** d'autre.
- remettre le capuchon de la plume pendant un arrêt prolongé d'utilisation de l'appareil.

## Les enregistrements :

Pour effectuer un enregistrement , il faut d'abord faire des essais préalables plume levée, puis un essai sur une feuille de brouillon, et enfin procéder à l'enregistrement définitif.

Il faut tracer sur chaque feuille d'enregistrement les axes de coordonnées. Pour l'axe des  $X$ , on supprime le signal  $Y$  et enregistre le signal  $X$  ou la base de temps (commutateur de vitesse de balayage). Pour l'axe des  $Y$ , on supprime le signal  $X$  et on enregistre le signal  $Y$ . Pour supprimer un signal sur une voie, il faut placer le bouton de réglage du calibre correspondant sur la position <0>.

Préciser, sur les enregistrements effectués, toutes les information utiles (calibres, légende, etc..).

## Manipulation

### Enregistrement

Réalisez le montage de la figure 1 en utilisant la tension variable du générateur (attention à la polarité du condensateur). Enregistrez  $U_C(t)$  la charge du condensateur. Choisissez une tension de charge (tension du générateur)  $U_{C1}$  telle que l'amplitude de l'exponentielle obtenue soit pleine page. Réalisez un deuxième enregistrement, sur la même feuille, avec une tension de charge  $U_{C2}$  deux fois plus petite. Vous tacherez de faire correspondre les débuts de charge ( $t = 0$ ) des deux enregistrements.

Mesurez la constante de temps  $\tau$  du circuit sur les deux graphes.

Sur une autre feuille, enregistrez la décharge du condensateur. On choisira  $U_{C1}$  comme tension de charge. Mesurez  $\tau$  et comparez avec les deux valeurs précédentes.

Conclusion. Comparez  $\tau$  avec la valeur théorique.

### Utilisation du papier semi-logarithmique

Cette mesure demande de revoir le cours relatif au tracé de courbes sur papier semi - logarithmique (choix du nombre de modules...).

D'une manière générale, si la loi d'évolution d'une grandeur n'est pas connue a priori, on peut vérifier qu'elle suit une variation exponentielle en portant ses valeurs en fonction du temps sur du papier semi-logarithmique. On veut vérifier cela à partir des enregistrements précédents.

Relever quelques couples de valeurs ( $u, t$ ) sur les 2 graphes précédents (charge et décharge) et utilisez une feuille de papier semi-logarithmique pour montrer que les expressions de  $u(t)$  des équations (3) et (6) sont correctes.

Pourquoi les pentes sont elles négatives ? A quoi correspond la constante de temps  $\tau$  du circuit sur ces graphes ?